Physique appliquée

Orestis Malaspinas

Table des matières

Avertissement **1**

Bibliographie **3**

1 Analyse dimensionnelle **5**
1.1 Généralités 5
1.2 Unités, Système International 6
1.2.1 Longueur 6
1.2.2 Temps 7
1.2.3 Masse 8
1.2.4 Température 8
1.2.5 Courant 8
1.3 Ordre de grandeur 9
1.4 Analyse dimensionnelle 10

2 Les lois de Newton **13**
2.1 Vecteurs 13
2.1.1 Motivation 13
2.1.2 L'arithmétique des vecteurs 13
2.1.3 Systèmes de coordonnées 18
2.1.4 Le produit scalaire 21
2.2 La force et la première loi de Newton 22
2.3 La deuxième loi de Newton 28
2.3.1 La masse 28
2.3.2 Et cette deuxième loi alors? 28
2.4 La troisième loi de Newton 32
2.5 Applications des lois de Newton 35
2.6 Problèmes couplés 38
2.6.1 Forces de frottement 39
2.6.2 Force de frottement cinétique 39
2.6.3 Force de frottement statique 40
2.6.4 Frottement visqueux 44
2.7 Questions 44
2.8 Mouvement circulaire et gravitation 46
2.8.1 La cinématique du mouvement circulaire 46
2.8.2 La dynamique du mouvement criculaire 47
2.8.3 La loi de la gravitation universelle 48
2.9 Les équations du mouvement 49
2.9.1 Le mouvement sans accélération 50

2.9.2 Le mouvement avec accélération 51

3 La charge électrique et le champs électrique 55
3.1 L'électricité statique et la conservation de la charge électrique . . 55
3.2 La charge électrique dans les atomes 56
3.3 Isolants et conducteurs 57
3.4 La loi de Coulomb 58
3.5 Deux exercices 62
3.6 Le champs électrique 64
3.7 Les lignes de champs électrique 67
3.8 Le champs électrique dans des conducteurs 69
3.9 La loi de Gauss 72
3.10 Résumé 76

4 Le potentiel électrique 77
4.1 L'énergie potentielle électrique 77
4.2 Le potentiel électrique 79
4.3 Lien entre potentiel électrique et champs électrique 82
4.4 La capacité électrique 84
4.4.1 Description moléculaire des diélectriques 88
4.5 Résumé 88

5 Le courant électrique 89
5.1 La batterie électrique et son fonctionnement en 5min 89
5.2 Le courant électrique 90
5.3 La loi d'ohm 92
5.4 La puissance électrique 94
5.5 Le courant alternatif 96

6 Les circuits électriques 101
6.1 Les résistances en série et en parallèle 101
6.2 Les circuits contenant des capacités en parallèle ou en série . . . 108
6.3 Les circuits RC 110
6.3.1 La charge du condensateur 110
6.3.2 La décharge du condensateur 112

7 Remerciements 115

Avertissement

Cette tentative de polycopié contient certainement un grand nombre d'erreurs étant donné qu'elle est développée en même temps que le cours est donné et qu'elle en est à ses premiers mois de vie. Quand vous trouverez des erreurs n'hésitez pas à me les communiquer et ainsi améliorer la qualité de ce polycopié. Toute erreur trouvée concernant de la "physique" (pas les fautes d'orthographe donc) seront récompensées par un bonus sur la note des contrôles continus.

Bibliographie

Il existe une multitude de bons livres de physique générale à disposition. Ce polycopié est largement inspiré du livre de D. C. Giancoli, *Physics: principles with applications*, 7-th edition, Pearson, 2014. D'autres lectures possibles sont les suivantes:

- Walker, Halliday & Resnick, Fundamentals of Physics, Wiley, 2014.
- E. Hecht, Physique, 1999.

Une partie de la bibliographie que je vous ai donné est en anglais. Il existe des traductions qui sont en principe disponibles à la bibliothèque.

Chapitre 1

Analyse dimensionnelle

1.1 Généralités

Toues les sciences "naturelles" sont basées sur *l'observation* du monde qui nous entoure. Mais malgré le fait qu'on ait l'impression que le processus d'observation soit une suite simple: observation, expérimentation, obtention de résultats, qu'on explique avec une *théorie* (un ensemble de *lois*) cela n'est pas vraiment le cas. En fait, de façon proche à ce qui se passe dans les arts, les sciences sont un processus hautement créatif. En effet, lors d'une observation un scientifique ne décrit pas tout ce qu'il voit, mais sélectionne uniquement ce qu'il juge important pour la compréhension et l'interprétation d'un phénomène. De plus, une fois sélectionné le processus à observer, il convient de créer une expérience permettant de le mesurer de façon aussi précise que possible pour pouvoir le décrire. La mesure tient donc une place centrale dans les sciences et se complète parfaitement avec la création de théories qui permettent l'explication d'observations. Par ailleurs, toutes les théories ne sont pas le fruit d'expériences (ou d'observations) mais ont souvent été le résultat de constructions de l'esprit. Dans ce cas les expériences, viennent confirmer (ou infirmer) les théories. En effet, une théorie physique est supposée vraie jusqu'à ce qu'une expérience vienne l'infirmer (on ne peut pas prouver une théorie).

Les expériences ont donc deux fonctions principales

- Collecter des données qui permettront la dérivation de lois physiques.
- Vérifier ou infirmer les lois physiques.

Les lois physiques sont des outils très pratiques permettant la prédiction *quantitative* de phénomènes (et non la "post-diction" comme avec les expériences). Il est par exemple possible de prédire très précisément la hauteur à laquelle il faut lancer un satellite pour qu'il se retrouve en orbite géostationnaire (et donc connaître la quantité de carburant nécessaire par exemple) grâce aux *lois de Newton*. Ce qui serait certainement beaucoup plus difficile à déterminer expérimentalement, s'il fallait faire des dizaines d'essais jusqu'à ce que ça marche.

Par ailleurs, beaucoup de "lois" ont des capacités prédictives mais ne sont pas complètement générales. Par exemple, bien que les lois de Newton marchent

très très bien pour notre vie de tous les jours, certaines applications d'usage quotidien ne fonctionneraient pas si on s'en tenait là. En effet, le GPS requiert l'extension des lois de Newton à la relativité générale pour pouvoir fonctionner correctement. En fait la gravitation Newtonienne est une approximation de la relativité générale.

Ces approximations sont souvent le résultat de simplifications faites dans la représentation dont ont se fait de processus physiques: les *modèles*. Un modèle est une vision de l'esprit qui permet de réunir plusieurs situations qui à première vue peuvent paraître non-semblables ou à simplifier un problème afin de pouvoir le résoudre plus simplement. Par exemple un liquide est composé d'atomes qui se déplacent. Il serait possible (mais complètement infaisable et inutile dans presque tous les cas) d'étudier chaque atome individuellement pour avoir une description très détaillée du mouvement d'un fluide. Néanmoins, il est beaucoup plus simple de faire *l'hypothèse* qu'un fluide peut être considéré comme un objet continu.

Les modèles permettent également un traduction en équations mathématiques d'un phénomène naturel. Ces équations peuvent ensuite d'être résolues à la main ou par ordinateur, chose que nous ferons durant ce cours. Mais avant d'aller plus loin, nous allons discuter des dimensions des différentes grandeurs physiques et leurs dimensions.

1.2 Unités, Système International

Toute mesure doit être effectuée par rapport à un "standard" ou unités. Cela n'a aucun sens de dire qu'un éléphant pèse 36, si nous ne disons pas 36 en quelles unités. Pour chaque grandeur de multiple standards ont été créé au cours des années qui sont devenus de plus en plus précis avec les avancées technologiques (combien exactement mesure 1m, la durée d'une seconde, etc). Dans cette section nous allons discuter les unités des grandeurs de base de la physique. Nous verrons en particulier le *Système International* (ou SI).

Ne pas se mettre d'accord sur un système d'unités peut avoir des conséquences catastrophiques. Un exemple récent est la perte du satellite Mars Climate Orbiter (le coût de la mission était de 330 millions de dollars) qui a explosé alors qu'il essayait de se mettre en orbite autour de Mars, car une partie du code informatique récoltant les donnée de la sonde donnait des résultats en unités non-SI alors que la NASA travaillait en SI. Il y a donc eu une très grossière erreur dans le calcul de la trajectoire à adopter pour la mise en orbite et le satellite s'est écrasé (plus de détails ici par exemple https://fr.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter).

Les unités sont définies par rapport à des grandeurs "facilement" mesurables avec une grade précision et qui ne changent pas (ou très très très peu) au cours du temps.

1.2.1 Longueur

Le standard international fût établi par la France dans les années 1790. Pour les unités de longueur est le mètre (abrégé m). A l'origine le mètre était 1/10'000'000

de la distance entre l'équateur et un des pôles. A partir de cette mesure un étalon en platine fût forgé (c'est quand même plus pratique à utiliser). Puis, en 1889, le mètre a été défini comme la distance entre deux très fines encoche sur une barre d'un alliage platine-iridium. Comme cette façon de définir le mètre n'était pas suffisamment précise pour beaucoup d'applications, en 1960 le mètre devint 1′650′763.73 longueur d'onde d'une lumière émise par le gaz krypton-86. En 1983, fût redéfini comme la distance parcourue par la lumière en 1/299'792'458 secondes.

Il existe d'autres unités de longueur, par exemple les britanniques utilisent le pouce ou inch (1in. correspond à 0.0254m). Dans ce cours nous nous concentrerons principalement sur le système SI.

A titre de comparaison la fig. 1.1 montre les relations entre les différentes unités de longueur qui existaient dans l'empire britannique. On y voit un très grand nombre d'unités différentes reliées entre elles par des relations plus ou moins compliquées. La page wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Unit%C3%A9s_de_mesure_anglo-saxonnes contient les unités anglosaxonnes pour des surfaces et des volumes également.

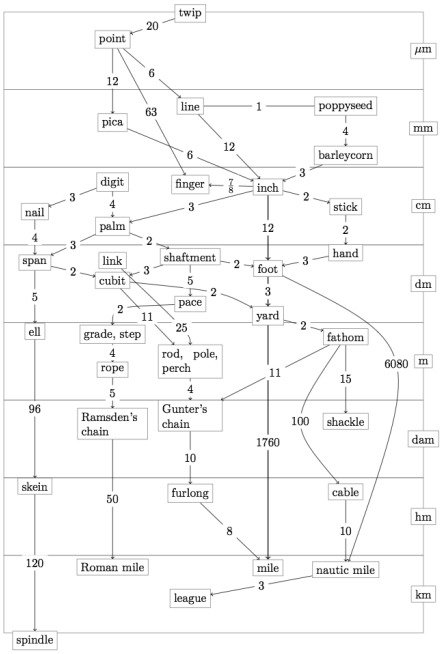

Figure 1.1: Différentes unités de longueur anglosaxonnes et les relations entre elles. Source: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c8/English_length_units_graph.png

1.2.2 Temps

La mesure du temps en SI est donnée en secondes (abrégée s). Une seconde a longtemps été définie comme étant $1/(3600 \cdot 24) = 1/86'000$-ème de journée solaire. La vitesse de rotation de la terre se ralentissant légèrement d'année en

année, il a été nécessaire de raffiner de plus en plus cette définition. A présent une seconde correspond à un processus atomique. Il s'agit du temps nécessaire à 9'192'631'770 de la transitions entre deux états de l'atome de césium 133.

1.2.3 Masse

Le kilogramme (abrégé kg) a été est la masse d'un étalon international du kilogramme stocké au Bureau International des poids et mesures au pavillon de Breteuil près de Paris. En 1795, le kilogramme était la masse d'un décimètre cube d'eau à une température de 4°C. Puis il a été remplacé par divers étalons pour finalement être celui en platine iridié (voir Fig. {fig. 1.2}). Jusqu'en 2019, il s'agissait de la seule unité utilisant encore un étalon, aucune "grandeur naturelle" n'ayant pu être utilisée pour définir le kilogramme autrement. Depuis 2019, le kilogramme est défini à partir de la *constante de Planck* (une contante physique très utilisée en mécanique quantique) dont la valeur est

$$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}. \tag{1.1}$$

Elle découle dès lors naturellement des mesures de la seconde et du mètre.

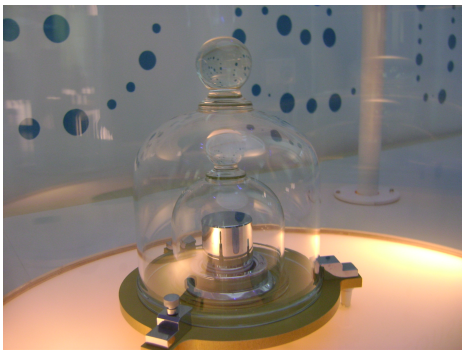

Figure 1.2: Une réplique de l'étalon international du kilogramme présentée à la cité des sciences et de l'industrie (Vilette), source: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ac/Prototype_kilogram_replica.JPG

1.2.4 Température

La température mesure le degré d'échauffement d'un corps. En SI l'unité de la température est le degré Kelvin (abrégé K). Il est défini comme le 1/273.16-ème de la température du point triple de l'eau (la température où les trois phases, solides, liquides, gazeuse, de l'eau peuvent coexister en équilibre thermodynamique). Cette température se trouve par définition à 273.16°K ou encore à 0.01°C. Nous verrons un peu plus de détails sur la définition du zéro degrés Kelvin (ou zéro absolu) dans la suite du cours.

1.2.5 Courant

L'intensité du courant électrique est mesurée en Ampères (abrégé A). Le courant est la quantité de charge par seconde qui passe dans un élément conducteur. On définit un ampère de façon un peu complexe. C'est l'intensité de courant

constant qui circulerait dans deux fils conducteurs infinis placés dans le vide, de section négligeable, et placés à une distance d'un mètre l'un de l'autre qui produirait une force de $2 \cdot 10^{-7}$ Newton par longueur de mètre. Les autres unités très utiles en électricité, l'ohm (abrégé Ω) et le volt (abrégé V) se déduisent ensuite par les fameuse formules $U = R \cdot I$ ($[\text{V}] = [\Omega] \cdot [\text{A}]$) et $P = U \cdot I$ ($[\text{W}] = [\text{V}] \cdot [\text{A}]$).

Avec ces relations, on constate qu'on peut déduire les unités de la résistance et de la tension en fonction de toutes celles que nous avons déjà vues précédemment.

1.3 Ordre de grandeur

Souvent nous pouvons vouloir qu'une estimation rapide d'une quantité ou simplement vouloir rapidement avoir une idée de comment "marche" un processus. Pour ce faire plutôt que d'entrer complètement dans tous les détails compliqués des calculs il peut être beaucoup plus simple de fonctionner avec des ordres de grandeurs de nos quantité (en gros on arrondit tout à l'entier ou même à la puissance de 10)[1]. On a donc un résultat précis "à la puissance de 10 près".

Exercice 1 *(Volume d'un lac)*

Calculez le volume du lac Léman sachant qu'il fait environ 70km de long pour 10km de large et 100m de profondeur.[2]

Exercice 2 *(Nombre de battements)*

Estimez le nombre de battements de coeur d'une humaine ou d'un humain sur la durée de sa vie.

Exercice 3 *(Hauteur d'un bâtiment)*

Je souhaite estimer la hauteur d'un bâtiment. Supposons que mes yeux soient à une hauteur de 1.5m du sol. La seule information connue est que quand je me place à une distance d'un écartement de bras d'un arbre (mesurant environ 3m de haut et se trouvant à 20 pas du bâtiment) placé entre moi et le bâtiment, l'arbre cache tout juste le haut du bâtiment.

---

[1] Cela peut être très pratique quand on fait ses courses pour savoir s'il y a une erreur grossière sur le montant qu'on paie.

[2] Selon le site: https://bit.ly/3V7gqHE le volume véritable du lac est de 89 milliards de mètres cubes. Sa longueur est de 73km, sa largeur est de 14km et sa profondeur moyenne est de 150.4m.

Exercice 4 *(Épaisseur d'une feuille de papier)*

Vous avez à disposition une règle (précise au millimètre) et un livre. Estimez aussi précisément que possible et avec un minimum d'effort l'épaisseur d'une feuille du livre.

1.4 Analyse dimensionnelle

Lorsque nous parlons de dimensions d'une quantité, nous nous référons souvent au type des unités de la quantité. Une longueur sera représentée par $[L]$[3], un temps par $[T]$, une masse par $[M]$, etc. Cette notation se généralise pour toute quantité dont les quantités sont des combinaisons (multiplication ou division) de ces unités de base. Ainsi, une surface sera $[L^2]$, une fréquence $[1/T]$, une vitesse $[L/T]$, une énergie $[M \cdot L^2/T^2]$, une force $[ML/T^2]$, etc.

Exercice 5 *(Quantité de grandeur de base)*

Écrivez les 5 types d'unités fondamentales nécessaires à la dérivation de toutes les autres.

L'analyse dimensionnelle peut se révéler particulièrement utile pour vérifier si des relations font du sens ou pas. Les lois physiques mettent en relation différentes quantités qui doivent être consistante également du point de vue des unités. On ne peut naturellement pas additionner des quantités qui n'ont pas les mêmes unités. Cela reviendrait à ajouter des éléphants à des lettres, le résultat serait alors peu clair.

Si nous prenons comme exemple la relation

$$s = x_0 + \frac{1}{2} v_0 t^2, \tag{1.2}$$

qui décrirait la position d'un objet en mouvement rectiligne uniforme, s, qui partirait d'une position x_0, aurait une vitesse v_0 après un temps t. Si nous effectuons l'analyse dimensionnelle de cette relation nous avons

$$\begin{aligned} [L] &\stackrel{?}{=} [L] + [L/T] \cdot [T^2], \\ &\neq [L] + [L \cdot T]. \end{aligned}$$

On constate donc que cette équation est certainement fausse. On note aussi que le 1/2 n'ayant pas d'unités a été simplement ignoré dans la relation ci-dessus, car il n'est pas porteur d'unités.

Si le résultat de l'analyse dimensionnelle se révèle incohérent, nous sommes certains que l'équation est fausse. L'inverse est cependant faux. En effet, une analyse dimensionnelle d'une équation cohérente ne permet pas d'être sûr que l'équation en elle-même est correcte. Par exemple tous les facteurs numériques

[3] Une lettre représentant la quantité entourée de crochets.

peuvent être complètement faux. Ou alors certaines quantités peuvent avoir les bonnes unités mais n'avoir aucun sens physique dans les cas étudiés.

Exercice 6 *(Analyse dimensionnelle)*

Essayez de deviner les relations entre les quantités suivantes à partir de leurs dimensions

1. Distance et vitesse.
2. Accélération et vitesse.
3. Distance et accélération.
4. Énergie et vitesse.
5. Force et énergie.
6. Énergie et tension.

Exercice 7 *(Dimensions)*

La vitesse d'un objet est donné par la fonction

$$v = a \cdot t^4 + b \cdot t - \frac{1}{4} c \cdot \sqrt{t}. \tag{1.3}$$

Quelles sont les unités de a, b, et c?

Chapitre 2

Les lois de Newton

Avant d'entrer à proprement parler dans ce chapitre, nous devons voir quelques notions mathématiques (ou les rappeler).

2.1 Vecteurs

Jusqu'ici dans le cours, nous avons vu des grandeurs appelées *scalaires*, c'est-à-dire des nombres, tels que la température, T, le temps, t, la masse, m, … Nous pouvons représenter ces nombres sur une droite infinie: les nombres réels. Nous pouvons les comparer (dire lequel est plus grand que l'autre), les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser, …

Pour ce chapitre, nous allons devoir étendre ce concept de *scalaires* pour pouvoir décrire des concepts plus complexes.

2.1.1 Motivation

Prenons l'exemple de la carte de la fig. 2.1. Si nous nous déplaçons à vol d'oiseau et ne connaissons que la distance parcourue, disons 60 km, et un point de départ, ici G'nèèèève (de Dieu). Nous avons une infinités de destinations possibles (tous les point du cercle noir). Si en revanche nous ajoutons à la distance parcourue une direction (la direction de la flèche noire), nous avons une destination unique. Nous définissons le déplacement comme étant la combinaison de ces deux informations: une direction et une longueur (de façon plus formelle la longueur est appelée *module*). Si ne nous déplacions pas en ligne droite, nous ne pourrions pas décrire notre trajet en fonction du déplacement uniquement. En effet, le déplacement d'un objet tel que nous le définissons ici ne prend pas du tout en compte le chemin effectivement parcouru (le trait rouge sur la fig. 2.1), mais uniquement le point de départ et d'arrivée.

2.1.2 L'arithmétique des vecteurs

Le déplacement est un *vecteur*, noté $\vec{s}$. Il est représenté par une flèche (voir fig. 2.1) dont la longueur, norme ou module, est noté $||\vec{s}||$. Le même déplacement $\vec{s}$ peut être décomposé en deux autres déplacements (voir la fig. 2.2): d'abord en

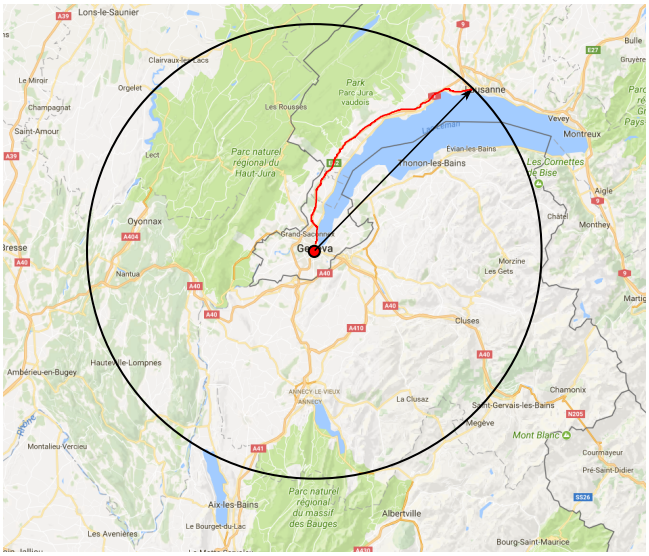

Figure 2.1: L'ensemble des destinations possibles si nous n'avions que le dép comme information (cercle noir), la position finale avec la distance et la direction de déplacement.

un déplacement $\vec{s}_d$ vers la droite, puis en un déplacement vers le haut $\vec{s}_h$. Il faut noter que cette décomposition peut s'effectuer dans un ordre différent: d'abord vers le haut puis vers la droite. Cette suite de déplacements définit l'addition de deux vecteurs

$$\vec{s} = \vec{s}_d + \vec{s}_h = \vec{s}_h + \vec{s}_d. \tag{2.1}$$

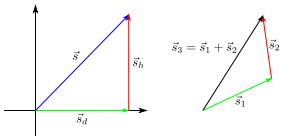

Figure 2.2: La décomposition du vecteur $\vec{s}$ en bleu en deux déplacements $\vec{s}_d$ et $\vec{s}_h$. De façon plus générale toute somme de vecteur $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

Géométriquement, la somme de deux vecteurs se représente toujours ainsi pour deux vecteurs quelconques

$$\vec{s}_3 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \tag{2.2}$$

La somme se représente en mettant bout à bout le vecteur $\vec{s}_1$ puis le vecteur $\vec{s}_2$. Cette représentation nous montre que la relation entre les normes est la suivante

$$||\vec{s}_3|| = ||\vec{s}_1 + \vec{s}_2|| \leq ||\vec{s}_1|| + ||\vec{s}_2||. \tag{2.3}$$

En d'autres termes la somme des longueurs de $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ et plus petite ou égale la longueur de la somme de $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$[1]. On peut ainsi décomposer un déplacement en un nombre arbitraire de déplacements intermédiaires (voir la fig. 2.3). Il faut

[1]La norme est l'équivalent de la valeur absolue pour les scalaires.

noter que l'ordre dans lequel la somme est effectuée n'a pas d'importance. On dit que la somme est *commutative* (comme pour les scalaires d'ailleurs). On constate d'ailleurs sur cette même figue que la longueur Une propriété de la somme de deux vecteurs qui est très importante c'est qu'elle est définie de telle façon à ce que le résultat soit toujours un vecteur.

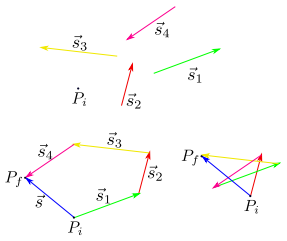

Figure 2.3: La somme de quatre vecteurs. En partant du point P_i on arrive toujours au point P_f peu importe l'ordre dans lequel nous effectuons la somme.

Un cas particulier d'addition de vecteur est l'addition de vecteurs parallèles et antiparallèles. Dans le cas parallèle les vecteurs, $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ ont la même direction. Le vecteur $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ aura donc la même direction que $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ et sa norme sera la somme des normes de $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ (voir la fig. 2.4).

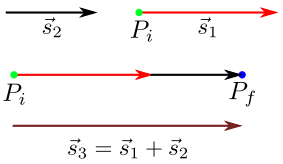

Figure 2.4: La somme de deux vecteurs parallèles.

Dans le cas anti-parallèle les vecteurs $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ les vecteurs pointent dans des directions opposées. Le vecteur $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ aura donc soit la direction de $\vec{s}_1$ soit celle de $\vec{s}_2$ et sa norme sera la différence des normes de $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ (voir la fig. 2.5).

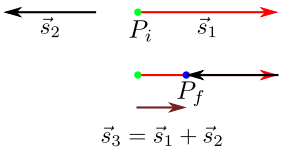

Figure 2.5: La somme de deux vecteurs anti-parallèles.

De façon très similaire à ce que nous faisons pour les scalaires (les nombres entiers, les rationnels et les réels) nous pouvons définir l'opposé d'un vecteur $\vec{s}$ et le noter $-\vec{s}$. Comme pour les scalaires, nous aimerions que le vecteur $-\vec{s}$ soit "l'inverse" du vecteur $\vec{s}$ pour l'addition. On aimerait donc que la la somme $\vec{s} + (-\vec{s}) = \vec{0}$. En d'autres termes, le départ départ de $\vec{s}$ soir le même que le point d'arrivée après la somme (voir la fig. 2.6).

Une autre façon d'écrire cette somme est de faire comme pour les scalaires:

$$\vec{s} + (-\vec{s}) = \vec{s} - \vec{s} = \vec{0}. \tag{2.4}$$

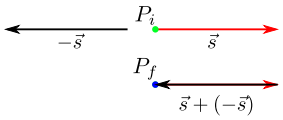

Figure 2.6: La somme de deux vecteurs anti-parallèles de même longueur.

Cette façon de faire nous permet de définir la soustraction de deux vecteurs, $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$

$$\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \vec{s}_1 + (-\vec{s}_2). \tag{2.5}$$

Comme on peut le voir sur la fig. 2.7 la soustraction de deux vecteurs consiste, en fait, à d'abord prendre prendre l'inverse du vecteur soustrait, $-\vec{s}_2$ et de l'ajouter au premier vecteur.

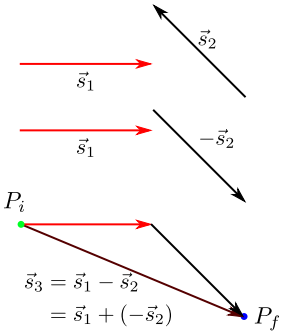

Figure 2.7: La soustraction de deux vecteurs.

Comme l'addition de deux vecteur est commutative, la soustraction peut également s'écrire dans un ordre différent (attention elle n'est pas commutative)

$$\vec{s}_3 = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \vec{s}_1 + (-\vec{s}_2) = -\vec{s}_2 + \vec{s}_1. \tag{2.6}$$

Un autre opération primordiale pour les vecteur est le produit avec un scalaire. Si nous avons un nombre α, et un vecteur $\vec{s}_1$, nous pouvons définir le produit

$$\vec{s}_2 = \alpha \cdot \vec{s}_1. \tag{2.7}$$

Si $\alpha > 0$, l'effet de cette multiplication est de modifier la norme de $\vec{s}_1$ proportionnellement à α, mais d'en laisser la direction inchangée (voir la fig. 2.8 la ligne du haut): le vecteur $\vec{s}_2$ est parallèle avec le vecteur $\vec{s}_1$. Lorsque $\alpha < 0$ on change toujours la norme proportionnellement à α, mais on change également la direction du vecteur (voir la fig. 2.8 la ligne du bas): le vecteur $\vec{s}_2$ est anti-parallèle avec le vecteur $\vec{s}_1$. Il y a deux cas particuliers:

1. Lorsque $\alpha = 1$, le vecteur $\vec{s}_2 = 1 \cdot \vec{s}_1 = \vec{s}_1$, et donc le vecteur $\vec{s}_1$ est inchangé.
2. Lorsque $\alpha = -1$, le vecteur $\vec{s}_2 = -1 \cdot \vec{s}_1 = -\vec{s}_1$, t donc le vecteur $\vec{s}_2$ est le vecteur *opposé* à $\vec{s}_1$.

Une propriété du produit d'un vecteur avec un scalaire est qu'elle est définie de telle façon à ce que le résultat soit toujours un vecteur. On peut à présent

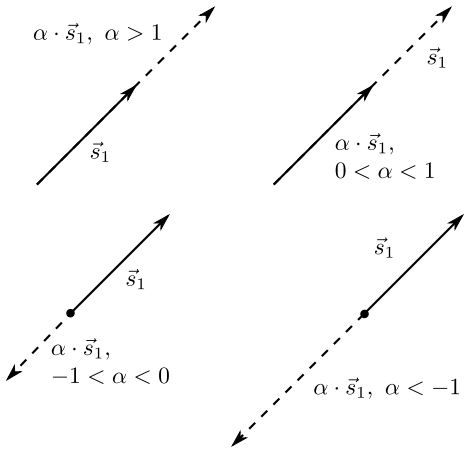

Figure 2.8: Produit d'un vecteur avec un scalaire α pour les 4 cas possibles.

comme pour le produit entre scalaire voir les propriétés de *distributivité*. Soient α_1, α_2 deux scalaires, et $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ deux vecteurs

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) &= \alpha_1 \cdot \vec{s}_1 + \alpha_1 \cdot \vec{s}_2, \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \vec{s}_1 &= \alpha_1 \cdot \vec{s}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{s}_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour la deuxième propriété on peut voir un exemple sur la fig. 2.9.

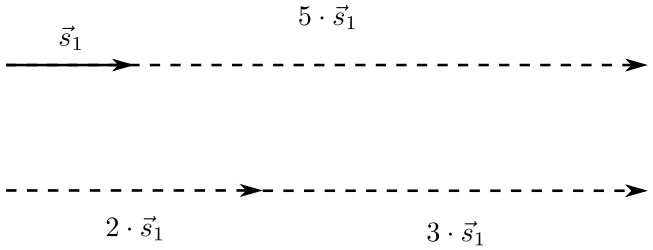

Figure 2.9: La distributivité de la somme de deux scalaire multipliés avec un vecteur $\vec{s}_1$ pour $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$.

Le produit avec un scalaire ainsi définit nous permet de définir le *vecteur unitaire*. Le vecteur unitaire d'un vecteur $\vec{s}$ se définit par

$$\vec{n} = \frac{\vec{s}}{||\vec{s}||}. \tag{2.9}$$

Ce vecteur comme son nom l'indique a une longueur (norme) de un

$$||\vec{n}|| = \left|\left| \frac{\vec{s}}{||\vec{s}||} \right|\right| = \frac{||\vec{s}||}{||\vec{s}||} = 1, \tag{2.10}$$

et la même direction que $\vec{s}$. Le vecteur $\vec{s}$ peut donc s'écrire à l'aide du vecteur unitaire $\vec{n}$ comme

$$\vec{s} = ||\vec{s}|| \cdot \vec{n}. \tag{2.11}$$

2.1.3 Systèmes de coordonnées

Depuis le début de ce chapitre nous avons vu des règles très générales pour représenter les vecteurs et en faire des sommes et des multiplications avec des scalaires. Il nous reste à trouver un moyen de les représenter numériquement.

Le moyen le plus commun de se représenter un vecteur dans le plan est de passer par les coordonnées *cartésiennes* (voir la fig. 2.10).

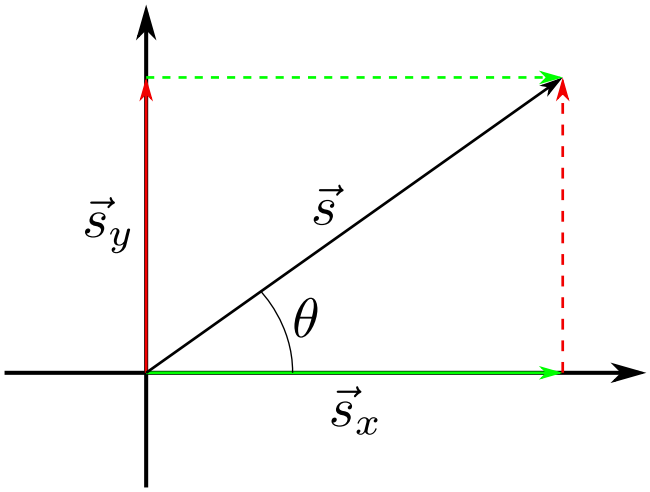

Figure 2.10: Le vecteur $\vec{s}$ est décomposé en deux parties $\vec{s}_x$, et $\vec{s}_y$.

Le vecteur est $\vec{s}$ est donné par

$$\vec{s} = \vec{s}_x + \vec{s}_y. \tag{2.12}$$

En définissant deux vecteurs unitaires particuliers qui sont alignés avec l'axe horizontal et vertical respectivement (voir fig. 2.11)

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

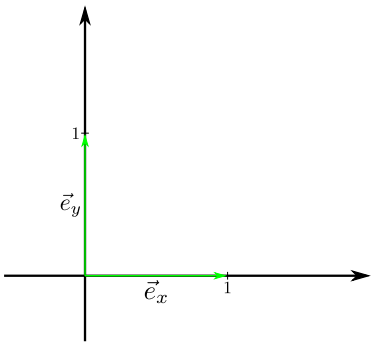

Figure 2.11: Les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

En utilisant les vecteurs unitaires, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, les vecteurs $\vec{s}_x$ et $\vec{s}_y$ peuvent s'écrire $\vec{s}_x = \vec{e}_x \cdot s_x$ et $\vec{s}_y = \vec{e}_y \cdot s_y$, où $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont les vecteurs unitaires dans la direction horizontale et verticale respectivement (voir éq. 2.13).

La norme des composantes de $\vec{s}_x$ et $\vec{s}_y$ peut se calculer à l'aide de la trigonométrie. On a donc

$$\begin{aligned} s_x &= ||\vec{s}_x|| = ||\vec{s}|| \cos(\theta), \\ s_y &= ||\vec{s}_y|| = ||\vec{s}|| \sin(\theta), \end{aligned} \tag{2.14}$$

où θ est l'angle entre l'axe horizontal et le vecteur $\vec{s}$ et où on note les *coordonnées* cartésiennes de $\vec{s}$, s_x et s_y. Le vecteur $\vec{s}$ peut donc se représenter uniquement avec ces deux nombres s_x et s_y sous entendu que la première coordonnée est le long de l'axe horizontal et la seconde selon l'axe vertical.

Maintenant que nous avons défini les composantes s_x et s_y, nous pouvons additionner les vecteurs en coordonnées cartésiennes. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et dont la somme est $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, les coordonnées de $\vec{w}$ sont données par

$$\begin{aligned} w_x &= u_x + v_x, \\ w_y &= u_y + v_y. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nous pouvons assez facilement nous en convaincre à l'aide de la fig. 2.12. De façon similaire, nous pouvons calculer le produit entre un scalaire et un vecteur. Nous avons que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ est donné par

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha \cdot v_x, \\ u_y &= \alpha \cdot v_y. \end{aligned} \tag{2.16}$$

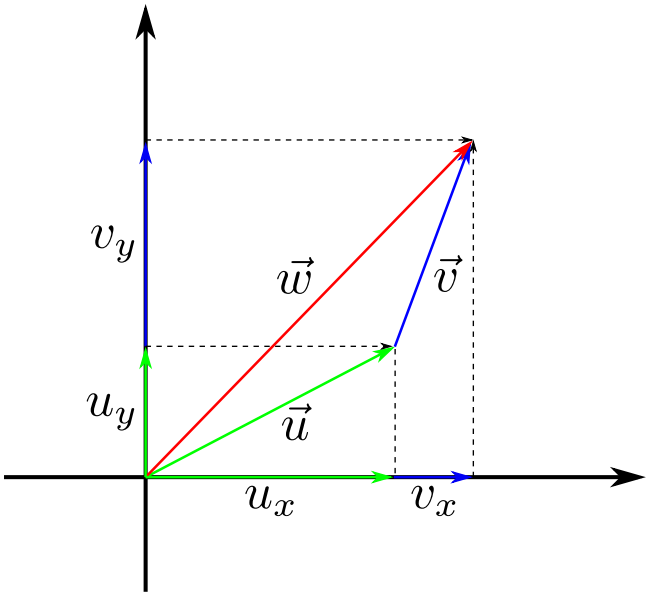

Figure 2.12: La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en composantes.

La notation pour la plus compact pour noter les composantes d'un vecteur

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Avec la représentation en composantes cartésiennes, il est aisé de calculer la longueur d'un vecteur $s = ||\vec{s}||$ à l'aide du théorème de Pythagore

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}. \tag{2.18}$$

Exercice 8 *(Opérations sur les vecteurs)*

1. Dessiner le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans le système de coordonnées cartésien.
2. Additionner les vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'abord à l'aide d'un dessin, puis avec les règles vues précédemment.
3. Calculer la longueur de la somme trouvée précédemment $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.
4. Calculer l'angle θ pour $\vec{w}$.
5. Calculer
$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \tag{2.19}$$
avec $\alpha = 2$ et $\beta = -1/2$.

De l'éq. 2.14, on voit qu'on pourrait aussi utiliser un autre système de coordonnées. En utilisant le couple formé par l'angle θ et la longueur s. On appelle cette représentation les coordonnée polaires (voir la fig. 2.13).

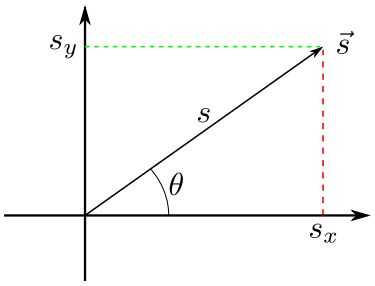

Figure 2.13: Le vecteur $\vec{s}$ peut être représenté selon ses composantes cartésiennes, s_x et s_y ou selon ses coordonnées polaires, s et θ.

Exercice 9 *(Changement de coordonnées)*

Soit un vecteur $\vec{s}$ dont les coordonnées cartésiennes sont

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Ecrire la transformation qu'il faut effectuer pour avoir les coordonnées polaires $\vec{s} = \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix}_{\text{polaires}}$. Calculer θ et s pour les vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes.

2.1.4 Le produit scalaire

Jusqu'ici nous avons vu comment additionner les vecteurs et les multiplier par des scalaires. Nous n'avons cependant pas encore vu un moyen pour les multiplier entre eux. Une façon de définir un tel produit, est le *produit scalaire*. Le produit scalaire entre deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule comme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\theta). \tag{2.21}$$

Le produit scalaire s'interprète donc comme le produit entre la norme de $\vec{u}$ et la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ et vice versa (voir la fig. 2.14).

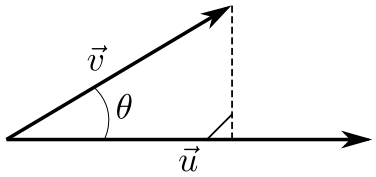

Figure 2.14: Interprétation géométrique du produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les propriétés du cosinus nous disent que si les deux vecteurs forment un angle de 90° entre eux (ou $\pi/2$ en radians) le produit scalaire est nul

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\pi/2) = 0. \tag{2.22}$$

Ces vecteurs sont dit orthogonaux ou normaux (voir fig. 2.15). Les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont orthogonaux

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = ||(1,0)|| \cdot ||(0,1)|| \cdot \cos(\pi/2) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \tag{2.23}$$

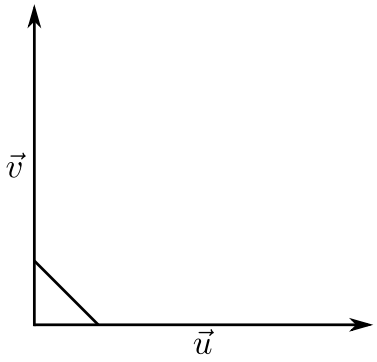

Figure 2.15: Interprétation géométrique du produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour des vecteurs orthogonaux.

En revanche si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles ou anti-parallèles le produit scalaire est le produit des normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (avec un signe négatif si les vecteurs sont anti-parallèles)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos 0 = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot 1 = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||. \tag{2.24}$$

Un cas particulier est le produit scalaire d'un vecteur $\vec{v}$ avec lui-même

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos 0 = ||\vec{v}||^2. \tag{2.25}$$

De cette définition, il est aisé de voir que le produit scalaire est commutatif

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{u}|| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \vec{u}. \tag{2.26}$$

Exercice 10 *(Propriétés du produit scalaire)*

Montrer que le produit scalaire a les propriétés suivantes. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs et soit α un scalaire:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Il est important de noter que le produit scalaire prend deux vecteurs et les transforme en un scalaire (un nombre).

Il existe une définition alternative pour le produit scalaire qui vous sera très utile pour son implémentation informatique

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y. \tag{2.28}$$

Travail pratique 1 *(Librairie de manipulation de vecteurs)*

Écrire une librairie de manipulation de vecteur en deux dimensions (par groupe de 5).

0. Écrire la structure de données contenant un vecteur à deux dimensions.
1. Écrire sur papier quelles sont les fonctionnalités désirées de notre librairie (faire valider par votre prof préféré).
2. Écrire les entêtes de fonctions.
3. Implémenter les fonctions (travail individuel).

2.2 La force et la première loi de Newton

Le concept de *force* est intimement lié avec le concept de mouvement. Pourquoi un objet en mouvement change de direction? Pourquoi un objet accélère ou décélère? Pourquoi un objet arrêté se met en mouvement?

Intuitivement, une force est toute traction ou poussée exercée sur un objet. Quand vous faites vos courses et que vous mettez en mouvement votre chariot en le poussant, vous exercez une force dessus. Pour le mettre en mouvement vous devez combattre la *force de frottement* (une force dite de *contact*, car elle agit lors du contact de deux objet: ici le chariot et le sol). Quand vous soulevez votre pack de 6 bières du sol également. Cette fois vous devez compenser la *force de gravité* (qui n'est pas une force de contact).

Une force se mesure à l'aide d'un *dynamomètre* et ses unités sont les Newtons, notés [N].

De façon générale, lorsque vous devez mettre en mouvement un objet, vous faites passer sa vitesse de zéro à une vitesse non-nulle: vous produisez une accélération. De même lorsqu'un objet est en mouvement et que vous essayez de changer sa vitesse, que ce soit en *norme* ou en *direction*, vous devez à nouveau lui appliquer une force. Le fait que la modification de la vitesse (l'accélération) ait une norme et une direction, nous montre que la force est une quantité *vectorielle*. Nous pourrons donc utiliser toutes les méthodes de calcul vues au chapitre précédent.

En général il n'y a pas qu'une seule force qui peut s'appliquer sur un objet. Sur la fig. 2.16 on a une situation *statique*. Une boîte est posée sur le sol et ne bouge pas. Comme vous avez pu vous en rendre compte dans votre vie de tous les jours, soulever ou porter une boîte (même légère) vous demande un certain effort, car elle pèse un certain *poids* (une force l'attire vers le sol). Lorsque la boîte est posée sur le sol, elle n'a pas soudainement perdu son poids et la force l'attirant vers le sol existe toujours. Le fait qu'elle ne bouge pas est dû au fait que le sol exerce une force égale en norme et opposée en direction sur la boîte. La somme des deux forces étant nulle, la boîte ne subit aucune accélération.

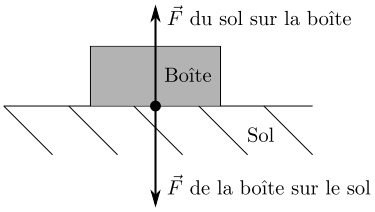

Figure 2.16: Un système composé du sol et d'une boîte. La boîte exerce une force $\vec{F}$ sur le sol, le sol exerce la *même* force sur la boîte mais en direction opposée.

Il y a deux concepts fondamentaux de ce que nous venons de discuter. Le premier est que plusieurs forces peuvent s'exercer sur un objet. La force *nette* s'appliquant ou force *résultante*, $\vec{F}_{\text{res}}$ n'est autre que la somme de toutes ces forces. Si un objet subit l'action de N forces, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_N$, alors la force résultante s'écrira

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N \tag{2.29}$$

.

De ce que nous venons de discuter, nous déduisons qu'une force est présente que lorsqu'on *modifie* la vitesse d'un objet, en d'autres termes qu'on modifie son *accélération*. Il est important de noter que cette modification est une quantité *vectorielle* et qu'on peut modifier non seulement la norme, mais également la direction de la vitesse.

Cette constatation est la première loi de Newton, ou loi d'inertie, qui peut s'énoncer ainsi:

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne uniforme, tant que la somme des forces agissant sur lui sont nulles.

En d'autres termes

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_N = \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_i = 0. \tag{2.30}$$

Question 1 *(Bus)*

Lorsque vous êtes dans le bus et que soudainement le chauffeur freine, vous êtes projetés vers l'avant. Quelle force est responsable de cette projection?

Réponse 1 *(Bus)*

Lorsque le bus freine, vous avez tendance à vouloir continuer de vous déplacer en mouvement rectiligne uniforme. Ainsi, vous continuez votre route car aucune force n'est là pour vous retenir.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la *statique*. Les objets sont tous par définition dans un état *d'équilibre* et la somme de toutes les forces agissant sur un objet seront *nulles*. En d'autres terme la force résultante est toujours nulle

$$\vec{F}_{\text{res}} = 0. \tag{2.31}$$

Exemple 1 *(Tirer sur une corde)*

Soient deux personnes tirant sur une corde (voir fig. 2.17). La personne en rouge applique une force $\vec{F}_2$ sur la corde et la personne en bleu applique une force $\vec{F}_1$ lorsque le système est à l'équilibre. Écrire la relation entre la force $\vec{F}_1$ et la force $\vec{F}_2$. Si la force $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ N, quelle sera la force $\vec{F}_2$?

Solution 1

Comme la force comme le système est à l'équilibre cela signifie que la force résultante est nulle. On a donc

$$\vec{F}_{\text{ref}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \tag{2.32}$$

On en déduit que

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{2.33}$$

Figure 2.17: La personne en rouge applique une force $\vec{F}_2$ sur la corde et la personne en bleu la force $\vec{F}_1$.

La situation d'équilibre ou non d'un système dépend évidemment des vecteurs de force qui y sont appliqués, mais également des *points d'action*: l'endroit où ces forces sont appliquées. Si nous considérons les deux situations de la fig. 2.18. Dans les deux cas nous avons une boîte qui ne bouge pas, puis nous appliquons les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Nous supposons que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Nous constatons que dans le premier cas, l'objet ne se met pas en mouvement (il reste dans un état d'équilibre car les forces s'annulent), alors que dans le deuxième, la boîte se met à tourner. La seule différence est le point d'application. En passant de l'application des forces des points A et B, aux points d'application C et D nous avons changé l'état d'équilibre. L'équilibre dépend donc du point d'application des forces.

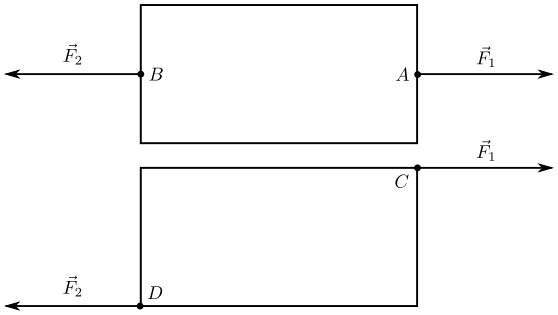

Figure 2.18: Les force $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ($\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$) sont appliquées sur la même boîte rectangulaire. La le cas du haut rien ne se passe, car les forces s'annulent. Dans le deuxième cas, la boîte va se mettre à tourner sur elle même (même si elle n'aura pas de mouvement de translation).

Afin de déterminer si nous avons une situation d'équilibre il est utile définir la *ligne d'action* d'une force. La ligne d'action d'une force est la droite qui a la même direction que le vecteur de la force et qui passe par le point d'application de la force. Une illustration se trouve sur la fig. 2.19, où on voit les lignes d'actions pour les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ (traitillés rouges et verts respectivement) dans le cas où elles sont alignées (haut) et où elles ne le sont pas (bas). Comme discuté précédemment lorsque les lignes d'action sont alignées, l'état d'équilibre est atteint et la boîte ne bougera pas. Dans le cas où les lignes d'action ne sont pas alignées, la boîte se mettra à tourner.

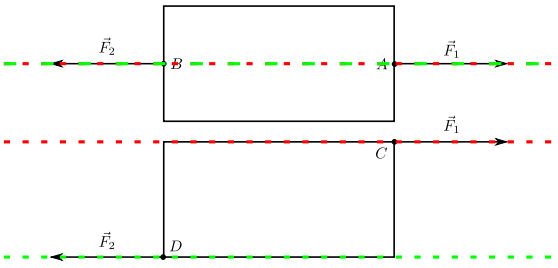

Figure 2.19: Les force $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et leurs lignes d'action respectivement en traitillés rouge et en vert.

On constate donc que pour se trouver dans un état d'équilibre, un système doit avoir non seulement des vecteurs de forces opposés, mais également agissant sur

la même ligne d'action.

Afin de simplifier, nous considérons ici les objet comme n'étant que des *points matériels*. Comme les objets n'ont aucune étendue (ils sont de taille nulle), la condition d'équilibre s'écrit beaucoup plus simplement

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}, \tag{2.34}$$

où $\vec{F}_i$ pour $i = 1..N$ est l'ensemble des forces agissant sur le point matériel. En d'autre termes, la force résultante sur le point doit être nulle.

Exemple 2 *(Tirer sur la corde: Plus on est de fous plus on rit)*

Soit la situation comme dans la fig. 2.20. La norme des trois forces vaut respectivement $F_1 = 500$ N, $F_2 = 707$ N, et $F_3 = 966$ N. La situation est-elle en équilibre?

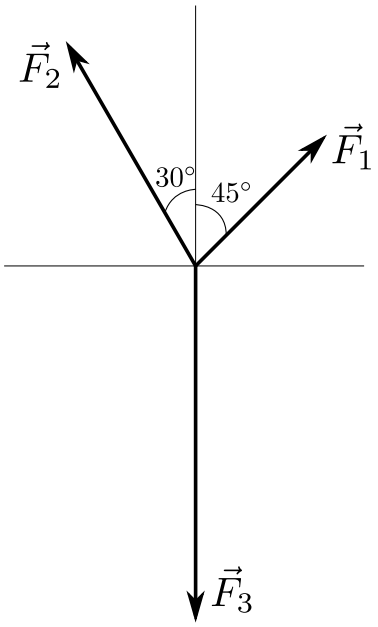

Figure 2.20: Trois personnes tirent sur trois cordes qui sont attachées entre elles.

Solution 2

Pour savoir si le système est à l'équilibre il faut savoir si la somme des trois force est nulle. Pour ce faire, on décompose les forces selon leur composantes

cartésiennes

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= F_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) \end{pmatrix} = F_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 354 \end{pmatrix} \text{ N} \\
\vec{F}_2 &= F_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) \\ \sin(120^\circ) \end{pmatrix} = F_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -354 \\ 612 \end{pmatrix} \text{ N} \\
\vec{F}_3 &= F_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(270^\circ) \\ \sin(270^\circ) \end{pmatrix} = F_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) \\ \sin(3\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -966 \end{pmatrix} \text{ N}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

On peut à présent calculer la force résultante

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 354 - 354 + 0 \\ 354 + 612 - 966 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N.} \tag{2.36}$$

On a donc que le système est en équilibre car la force résultante est nulle.

Un exercice comme le précédent, est en général une simplification d'un situation bien plus complexe. On peut imaginer la situation comme sur la fig. 2.21, où il s'agit de calculer la force que doivent appliquer les deux masses sur les côtés sur leur corde respective pour que la caisse soit à l'équilibre, sachant que la caisse exercice une force de 800 N.

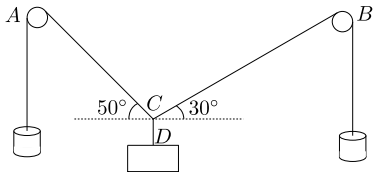

Figure 2.21: Deux poids sont attachés à deux cordes, qui sont reliées à une troisième portant une boîte.

Pour résoudre cette exercice il faut se rendre compte que la force se transmet le long des cordes. On a donc que le système peut se mettre dans une situation équivalente à celle de la fig. 2.20. On a les trois forces qui s'appliquent à l'endroit où se rencontrent les trois cordes: au point C. On peut se ramener à la situation de la fig. 2.22.

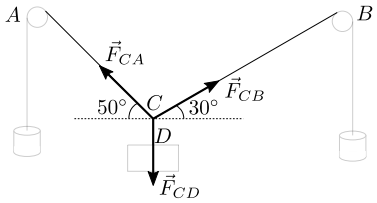

Figure 2.22: On peut ignorer tous les détails de notre problème et simplement ramener toutes les forces au points C.

Notre système est à l'équilibre si

$$\vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{CD} = 0. \tag{2.37}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} F_{CA} \cdot \begin{pmatrix} \cos(130^\circ) \\ \sin(130^\circ) \end{pmatrix} + F_{CB} \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix} = 0, \\ F_{CA} \cdot \begin{pmatrix} -0.643 \\ 0.766 \end{pmatrix} + F_{CB} \cdot \begin{pmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, on obtient

$$F_{CB} \cong 522 \text{ N}, \quad F_{CA} \cong 704 \text{ N}. \tag{2.39}$$

2.3 La deuxième loi de Newton

2.3.1 La masse

Pour la suite du chapitre, il est important de définir le concept de *masse*. La masse d'un objet peut être vue comme la "quantité de matière" qu'il contient. Cette définition, bien que facilement compréhensible, n'est pas très précise.

En fait la masse peut être vue comme un mesure de *l'inertie* d'un objet. C'est-à-dire que plus la masse d'un objet sera grande, plus la force nécessaire pour changer sa vitesse (lui donner une certaine accélération) sera grande. Quand l'objet est au repose il sera difficile de le mettre en mouvement. A l'inverse, plus sa vitesse sera grande, plus il sera difficile de l'arrêter.

Comme vous le savez sans doute, la masse est mesurée en kilogrammes, ou kg, en SI.

Une voiture a une plus grande inertie qu'un balle de tennis de table: essayez de mettre en mouvement une voiture avec un raquette de ping-pong en tapant dessus, la voiture risque de ne pas bouger beaucoup. La masse de la voiture est donc beaucoup plus élevée que celle de la balle.

Il est très important de ne pas confondre les concepts de *masse* et de *poids*. Comme nous venons de le discuter la masse est la quantité d'inertie d'un objet. Le poids est la *force* exercée par la gravité sur l'objet. Afin d'illustrer la différence, prenons l'exemple des astronaute qui ont marché sur la lune. Vous avez sans doute tou · te · s vu · e · s la vidéo où ils font des sauts avec une grande facilité en portant une combinaison dont la masse est de près de 100 kg apparemment sans effort. Cela serait totalement impossible sur terre. Leur masse est pourtant la même sur terre ou sur la lune. La différence se situe au niveau de la force qu'exercent la lune ou la terre sur un astronaute. En fait sur la lune la force gravitationnelle exercée sur un objet (son poids) est environ six fois plus faible que sur la terre.

2.3.2 Et cette deuxième loi alors?

La première loi de Newton nous dit qu'en absence de force résultante sur un objet, il restera au repos s'il était au repos, ou s'il était en mouvement il continuera son mouvement avec la même vitesse en ligne droite. En revanche, cela ne nous dit rien sur ce qui se passe quand une force est exercée sur l'objet.

A l'inverse, une force résultante exercée sur un objet va modifier sa vitesse dans la direction de la force: si la force est dans la direction du mouvement elle va changer la norme de la vitesse, si elle est perpendiculaire au mouvement elle va modifier uniquement sa direction. Comme un changement de vitesse est une accélération, nous pouvons dire que l'effet d'une force sur un objet est de causer une accélération. Il est très important de réaliser qu'une accélération, notée $\vec{a}$, est une quantité vectorielle et n'est pas uniquement la modification de la norme de la vitesse, mais représente toute modification du vecteur vitesse au cours du temps

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \tag{2.40}$$

où $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ et Δt est un intervalle de temps (voir la fig. 2.23).

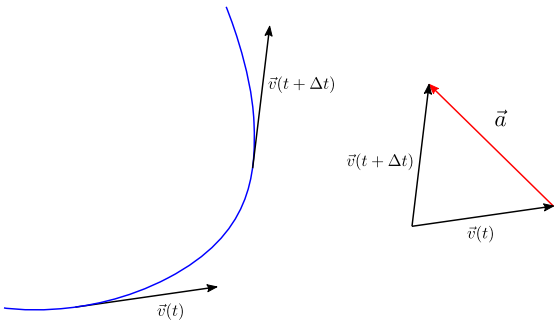

Figure 2.23: L'accélération $\vec{a}$ (en rouge) est une quantité vectorielle. Elle est la variation de la vitesse (qui est également une quantité vectorielle) au cours du temps. Sur cette figure la trajectoire (en bleu) d'un objet et deux vecteurs vitesse à des temps t et $t + \Delta t$.

Comme on peut le voir sur la fig. 2.23, bien que la vitesse ait la même norme (je vous le promets), il y a une accélération non nulle, car la vitesse a changé de direction au cours du temps. On peut en déduire qu'une force est appliquée sur l'objet.

Maintenant que nous savons que force et accélération sont des quantités reliées entre elles. Nous devons encore déterminer comment.

Imaginons l'expérience suivante. Soit un chariot à roulettes posé sur un plan horizontal (négligeons les frottement). On tire le chariot avec une force horizontale et constante $\vec{F}_1$. On calcule son accélération en mesurant le temps, t_1, qu'il faut au chariot pour atteindre une certaine vitesse $\vec{v}$ (voir la fig. 2.24)

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{v}}{t_1}. \tag{2.41}$$

On répète l'expérience en appliquant une force $\vec{F}_2 = 2 \cdot \vec{F}_1$, $\vec{F}_3 = 3 \cdot \vec{F}_1$, etc.

Les résultats qu'on obtiendrait sont schématisés sur la fig. 2.25. On voit que l'accélération est proportionnelle à la force: quand on double la force, on double l'accélération, quand on triple la force, on triple l'accélération, …

Il nous manque encore la constante de proportionnalité. Comme nous l'avons discuté tout à l'heure la masse entre également en jeu. Quand on applique

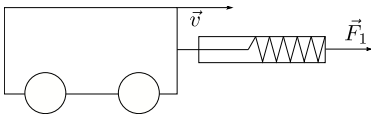

Figure 2.24: On applique une force $\vec{F}_1$ (mesurée à l'aide d'un dynamomètre) sur le chariot et on mesure le temps qu'il faut au chariot pour atteindre une vitesse $\vec{v}$.

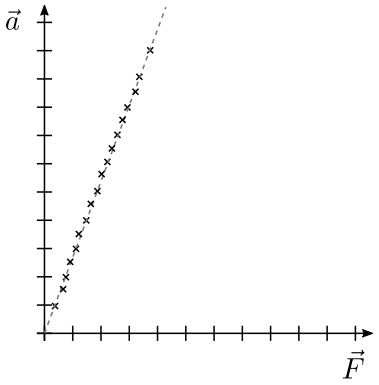

Figure 2.25: L'accélération en fonction de la force. On voit qu'il y a une relation de proportionnalité entre les deux.

la même force sur deux objets, le plus léger accélérera plus que le plus lourd. Newton énonça sa deuxième loi comme suit:

L'accélération d'un objet est proportionnelle à la force résultante qui lui est appliquée et inversement proportionnelle à sa masse. La direction de l'accélération est la direction de la force.

On peut écrire cette loi sous forme mathématique comme

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}, \tag{2.42}$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération, $\vec{F}_{\text{res}}$ la force résultante appliquée sur l'objet de masse m. On peut également écrire cette relation sous la forme plus familière en multipliant des deux côtés par m

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}. \tag{2.43}$$

Si nous voulons l'écrire en composantes et en deux dimensions, l'équation ci-dessus devient

$$\begin{pmatrix} F_{x,\text{res}} \\ F_{y,\text{res}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a_x \\ m \cdot a_y \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

ou encore

$$\begin{aligned} F_{x,\text{res}} &= m \cdot a_x, \\ F_{y,\text{res}} &= m \cdot a_y. \end{aligned} \tag{2.45}$$

L'accélération ayant des unités de [m/s^2] et la masse des [kg], les unités de la force sont [N] = [kg $\cdot$ m/s^2]. On a donc qu'un Newton est la force qu'il faut

appliquer sur un objet d'un kilogramme pour l'accélérer d'un mètre par seconde au carré.

Exemple 3 *(Ordres de grandeur)*

Quelle est la force requise pour accélérer une voiture de 1000 kg à 5 m/s^2 et une balle de 100 g à la même accélération.

Solution 3 *(Ordres de grandeur)*

De la seconde loi de Newton, on a que

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}. \tag{2.46}$$

Comme la force agit dans la direction du mouvement, on peut considérer le problème comme unidimensionnel et donc ne s'intéresser qu'aux normes des vecteurs ci-dessus. Cette équation se réécrit donc

$$F_{\text{res}} = m \cdot a. \tag{2.47}$$

Nous connaissaons dans les deux cas $a = 5$ m/s^2 et $m_{\text{voiture}} = 1000$ kg et $m_{balle} = 0.1$ kg. On a donc

$$\begin{aligned} F_{\text{voiture}} &= 1000 \cdot 5 = 5000 \text{ N}, \\ F_{\text{balle}} &= 0.1 \cdot 5 = 0.5 \text{ N}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Exemple 4 *(Force pour arrêter une voiture)*

Soit une voiture de 1000 kg qui roule à 72 km/h. Conducteur freine pendant 5 s avec une force constante pour l'arrêter. Calculer la force nécessaire pour arrêter la voiture.

Solution 4 *(Force pour arrêter une voiture)*

La force est dans la même direction que le mouvement de la voiture. On peut donc considérer le problème comme unidimensionnel.

La voiture roule à une vitesse de $v = 72$ km/$h = 20$ m/s. La voiture passe de 20 m/s à 0 m/s en 5 s, c'est-à-dire que son accélération est de

$$a = \frac{0 - 20}{5} = -4 \text{ m/s}^2. \tag{2.49}$$

La force est donc de

$$F = m \cdot a = 1000 \cdot (-4) = -4000 \text{ N}. \tag{2.50}$$

La force est négative, car elle est dans le sens opposé au mouvement de la voiture.

2.4 La troisième loi de Newton

Une force qu'on ressent toujours dans notre vie de tous les jours est la force de gravitation. Dans ce cas là, l'accélération est l'accélération gravitationnelle, notée $\vec{g}$ dont la norme à la surface de la terre est de 9.81 m/s^2 et qui est toujours dirigée vers le centre de la terre. Bien que cette force soit toujours présente, nous ne ressentons pas d'accélération lorsque nous sommes par exemples assis sur une chaise.

Question 2

Que se passe-t-il donc?

Réponse 2

Notre corps est soumis à la gravité. Il transmet cette force à la chaise sur laquelle nous sommes assis. En réaction, la chaise exerce une force égale en norme et opposée en direction à la force de gravité.

Ce comportement se généralise à toute force, même lorsqu'une accélération est présente. Lorsqu'on plante un clou avec un marteau. La force que le marteau applique sur le clou, le marteau ressent une force égale en norme et opposée en direction appliquée par le clou.

Ce comportement a été décrit par Newton dans sa troisième loi:

Lorsqu'un objet exerce une force sur un second objet, le second objet exerce une force égale en norme et de opposée en direction sur le premier.

Si les objets sont notés A et B, on a que la force de A sur B, notée $\vec{F}_{AB}$ et celle de B sur A, $\vec{F}_{BA}$ sont reliées par la relation

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{2.51}$$

La troisième loi de Newton est aussi connue sous le nom du principe *d'action-réaction.*

Cette loi peut sembler contre intuitive dans un premier temps, mais en fait vous pouvez l'observer tous les jours. Lorsque vous appuyez sur une table avec votre main, vous voyez votre main se déformer, car la table exerce une force sur votre main. Plus vous appuierez fort, plus la déformation sera grande.

Question 3 *(Gravité)*

Lors d'un saut en chute libre, la force de gravité de la terre (qui est responsable de la chute libre) et la force de l'homme sur la terre sont égales et opposées. Dès lors, pourquoi est-ce l'homme qui tombe et non la terre qui se rapproche de l'homme?

Réponse 3 *(Gravité)*

En fait bien que la force soit égale et opposée, les objets, et en particulier leur masse, sont différents. Dans le cas de la chute libre, un homme pèse environ 80 kg, alors que la terre a une masse d'environ $6 \cdot 10^{24}$ kg. La force de gravité se calcule comme

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}, \tag{2.52}$$

où $\vec{g}$ est le vecteur d'accélération gravitationnelle, avec la norme de $\vec{g}$ de la terre qui est de

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2. \tag{2.53}$$

On a donc que la norme de force gravitationnelle que ressent un humain en chute libre sur terre est de

$$F_g = 80 \cdot 9.81 \cong 800 \text{ N}. \tag{2.54}$$

Cette force est égale et opposée à celle que ressent la terre. On peut donc calculer l'accélération résultant de cette force sur la terre

$$a_{\text{terre}} = \frac{F_g}{m_{\text{terre}}} = \frac{800}{6 \cdot 10^{24}} \cong 1.3 \cdot 10^{-22} \text{ m/s}^2. \tag{2.55}$$

L'accélération de la terre est donc tellement faible qu'elle est complètement imperceptible.

Il existe beaucoup d'exemple où ce principe "d'action-réaction" est très utile.

Une application très spectaculaire est la propulsion des fusées. Lors de son décollage les moteurs de la fusée éjectent une grande quantité de gaz: ils leur appliquent une force verticale dirigée vers l'arrière de la fusée (voir la fig. 2.26). Les gaz en contre-partie exercent une force dirigée vers l'avant fusée. C'est cette force qui est responsable de la propulsion de la fusée, et non une éventuelle force que la fusée exercerait sur le sol ou sur l'atmosphère (via les gaz éjectés). Ce processus est tout à fait similaire à ce qui se passe quand un ballon se dégonfle.

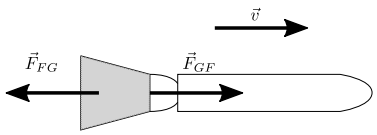

Figure 2.26: Illustration de l'éjection de gaz d'une fusée qui est propulsée par la force de réaction des gaz sur la fusée. La force de la fusée sur les gaz $\vec{F}_{FG}$ vers l'arrière et la force de réaction des gaz sur la fusée $\vec{F}_{GF}$.

Lorsque nous nous déplaçons à pieds c'est également la troisième loi de Newton qui fait que nous avançons. Avec nos pieds nous poussons sur le sol vers l'arrière. En réaction le sol pousse vers l'avant sur nos pieds, causant une accélération nette vers l'avant (voir la fig. 2.27).

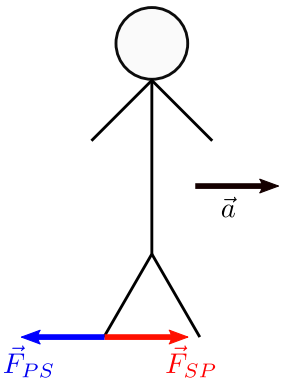

Figure 2.27: Illustration de la marche à pieds. Nos pieds exercent une force vers sur le sol dirigée vers l'arrière (en bleu), $\vec{F}_{PS}$. Le sol exerce, lui une force vers l'avant sur nos pieds (en rouge), $\vec{F}_{SP}$ ce qui fait que nous sommes propulsés vers l'avant.

Le même principe s'applique à plus ou moins tous les modes de propulsion: le patin à glaces, la voiture, etc. Il est donc très important de se souvenir de quel objet est originaire la force et à quel objet elle s'applique. Comme noté précédemment une force s'appliquant d'un objet A sur un objet B sera noté F_{AB}.

Reprenons l'exemple de la marche. D'après la troisième loi de Newton $\vec{F}_{PS} = -\vec{F}_{SP}$. Hors on sait que

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{2.56}$$

On aurait tendance à dire que la force résultante sur le marcheur est

$$\vec{F}_{PS} + \vec{F}_{SP} = 0. \tag{2.57}$$

Ce raisonnement est évidemment faux (on sait d'expérience que lorsque nous marchons nous avançons…). EN fait pour calculer la force résultante sur un objet, il faut faire la somme des force agissant *sur* l'objet et ne pas compter celles qu'il applique sur d'autres. Dans le cas du marcheur, on a donc que

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{SP}. \tag{2.58}$$

Problème 1 *(Pousser un tonneau)*

Soit un tonneau posé sur le sol. On aimerait savoir quelle force une personne doit appliquer sur le tonneau pour le déplacer en le poussant (voir fig. 2.28)?

1. Écrire toutes les forces en présence, avec l'origine et la cible de chaque force.
2. Calculer le bilan des forces agissant sur chaque objet.
3. Déterminer la force minimale à appliquer pour mettre en mouvement le tonneau.

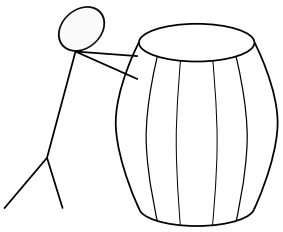

Figure 2.28: Schéma d'une personne poussant un tonneau.

Question 4 *(Accident)*

Un gros camion entre en collision frontale avec une petite voiture de sport.

1. Quelle est la voiture qui va ressentir la plus grande force?
2. Quelle est la voiture qui va ressentir la plus grande accélération?
3. Quelle sont les de Newton qui vont nous aider à trouver les réponses à ces questions?

Réponse 4 *(Accident)*

Un gros camion entre en collision frontale avec une petite voiture de sport.

1. Les deux ressentent la même force.
2. La voiture de sport.
3. Respectivement la troisième et la deuxième.

2.5 Applications des lois de Newton

Dans cette section, nous allons mettre en pratique les lois de Newton que nous venons de voir.

Exemple 5 *(La boite)*

Soit une boîte de masse $m = 1$ kg posée sur une table et ne bougeant pas.

1. Déterminer son poids et calculer la force exercée sur la boîte par la table.
2. On appuie sur la boîte avec une force de 10 N. Quelle est la force exercée par la table sur la boîte?
3. On tire avec une force de 5 N en direction verticale sur la boîte. Quelle est la force exercée par la table sur la boîte?
4. On tire avec une force de 20 N en direction verticale sur la boîte. Quelle est la force exercée par la table sur la boîte?
5. Quelle est l'accélération de la boîte dans la situation 4?

Solution 5 *(La boite)*

Sur la fig. 2.29 on voit un schéma pour les parties 1 à 4.

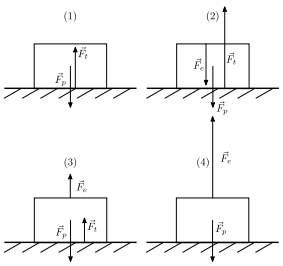

Figure 2.29: Schéma des quatre situation de l'Exemple 5 (La boite).

1. La masse de la boîte étant de 1 kg, on a que son poids est de

$$F_g = 1 \cdot (-9.8) = -9.8 \text{ N}. \tag{2.59}$$

Comme la boîte ne subit pas d'accélération, on en déduit que la force résultante agissant sur elle

$$F_g + F_t = 0 \Leftrightarrow F_g = -F_t, \tag{2.60}$$

où F_t est la force de la table sur la boîte. On a donc que

$$F_t = 9.8 \text{ N}. \tag{2.61}$$

2. On applique une force externe, $F_e = -10$ N sur la boîte. La boîte ne bougeant toujours, on en déduit que la force résultante doit rester nulle

$$\begin{aligned} 0 &= F_g + F_t + F_e, \\ F_t &= -F_e - F_g, \\ F_t &= 10 + 9.8 = 19.8. \end{aligned} \tag{2.62}$$

La boîte apparaît donc plus lourde à la table. Coïncidence? Je ne crois pas.

3. Lorsqu'on tire la boîte vers le haut avec une force de $F_e = 5\ N$, on ne tire pas assez fort pour soulever la boîte. Elle va donc rester en contact avec la table. La boîte ne bougeant toujours pas, la force résultante sur la boîte doit être nulle

$$\begin{aligned} 0 &= F_g + F_t + F_e, \\ F_t &= -F_e - F_g, \\ F_t &= -5 + 9.8 = 4.8. \end{aligned} \tag{2.63}$$

La boîte apparaît donc plus légère à la table. Coïncidence? Je ne crois pas.

4. Cette fois la force appliquée à la boîte est plus élevée que son poids. Ainsi, on va pouvoir soulever la boîte. La table n'exercera plus aucune force sur la boîte.
5. Lorsqu'on tire la boîte vers le haut avec une force de $F_e = 20\ N$, on tire assez fort pour soulever la boîte. On aura donc une force résultante non

nulle. Cette force sera de

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= F_g + F_e, \\ F_{\text{res}} &= -9.8 + 20 = 10.2 \text{ N}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

On peut dès lors calculer l'accélération de la boîte grâce à la deuxième loi de Newton

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= m \cdot a, \\ a &= \frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{10.2}{1} = 10.2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Exercice 11 *(Changement de poids dans un ascenseur)*

Une personne se trouve dans un ascenseur à l'arrêt. Elle est debout sur une balance indiquant qu'elle pèse 70 kg. L'ascenseur démarre et commence à monter avec une accélération constante de 2 m/s^2 pendant une seconde puis continue à vitesse constante.

1. Faire un croquis de la situation avec les forces présentes.
2. Quelle est le poids de la personne pendant la phase d'accélération? (Qu'indique la balance?)
3. Qu'indique la balance après la phase d'accélération, lorsque l'ascenseur va à une vitesse de 2 m/s?

Jusqu'ici, nous ne nous sommes intéressés principalement qu'à des problèmes unidimensionnels impliquant les lois de Newton ce qui simplifie beaucoup leur traitement mathématique.

Exemple 6

Considérons une boîte de masse $m = 10$ kg posée sur le sol sur laquelle une corde est attachée. On essaie de tirer la boîte avec une force $\vec{F}$ à l'aide de la corde qui formera un angle $\theta = 30°$ avec le sol (voir la fig. 2.30). De plus, il existe une force de frottement horizontale qui s'oppose au mouvement de la boîte, $\vec{F}_{\text{frot}}$.

1. Calculer la force minimale qu'on doit fournir pour faire bouger la boite si la force de frottement est de 10 N.
2. Quelle est la force minimale à fournir pour décoller la boite du sol?

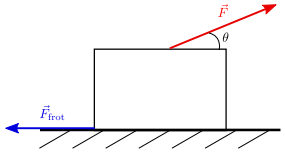

Figure 2.30: Une boite oblique avec une force de frottement.

Solution 6

Le bilan des force présentes peut s'écrire

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{frot}} + \vec{F}_g. \tag{2.66}$$

Les composantes de la force $\vec{F}$ peuvent s'écrire

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos(\theta) \\ F\sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

1. La force minimale pour que la boite commence à bouger horizontalement est le F, tel que
$$F_{\text{res},x} = 0, \tag{2.68}$$
autrement soit dit il faut résoudre l'équation
$$\begin{aligned} F\cos(\theta) - F_{\text{frot},x} &= 0, \\ F = \frac{F_{\text{frot},x}}{\cos(\theta)} &= 11.5 \text{ N}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

2. Afin de de soulever la boite il est nécessaire que la composante y de la force résultante soit nulle. En d'autre termes que la composante vertical de $\vec{F}$ contrebalance exactement la force de gravité F_g
$$\begin{aligned} F\sin(\theta) - F_g &= 0, \\ F = \frac{F_g}{\sin(\theta)} &= 196 \text{ N}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

2.6 Problèmes couplés

Lorsque plus d'un corps est présent dans un problème, on a à faire à un *système couplé*. Il s'agira alors en général de résoudre un système d'équations. Nous allons illustrer ce genre de situations avec l'exemple suivant

Exemple 7 *(Deux boites)*

Soient deux boites, notées A et B, reliées par une corde, comme dans la situation de la fig. 2.31. Les boites ont des masses respectives de $m_A = 10$ kg et $m_B = 20$ kg. Une force horizontale est appliquée sur la boite A, $F_h = 50$ N.

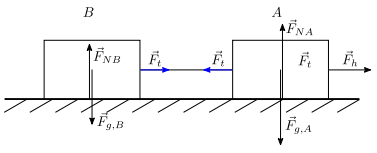

Figure 2.31: Deux boites reliées par une corde.

1. Calculer l'accélération de chaque boite.
2. La tension dans la corde qui relie les boites.

Solution 7 *(Deux boites)*

Lorsque nous tirons sur la boite A une force de tension, $\vec{F}_t$, se crée dans la corde reliant les deux boites. Cette force sera dirigée vers la droite pour la boite B et vers la gauche pour la boite A. Selon le principe d'action-réaction, ces deux forces sont égales en norme et opposée en direction. Le mouvement étant uniquement horizontal, les forces normales (les force de gravité et les réactions de la table: $\vec{F}_{g,A}, \vec{F}_{NA}, \vec{F}_{g,B}, \vec{F}_{NB}$) n'entrent pas en ligne de compte pour cet exercice.

1. Nous pouvons à présent faire le bilan des forces horizontales. Sur la boite A, nous avons
$$F_h - F_t = m_A \cdot a_A, \tag{2.71}$$
alors que pour la boite B, nous avons
$$F_t = m_B \cdot a_B. \tag{2.72}$$
Comme les boites sont connectée et que nous négligeons tout effet élastique dans la corde, les deux accélérations seront égales $a_A = a_B = a$. On a donc deux équations à deux inconnues à résoudre (nous ne connaissons pas a et F_t. En additionnant les deux équations ci-dessus on a
$$\begin{aligned} F_h = m_A \cdot a + m_B \cdot a = (m_A + m_B) \cdot a, \\ 50 = 30 \cdot a, \\ a = 5/3 \text{ m}/s^2. \end{aligned} \tag{2.73}$$

2. En substituant à présent ce résultat dans l'éq. 2.72, on obtient la tension
$$F_t = m_B \cdot a = 20 \cdot \frac{5}{3} = \frac{100}{3} \text{ N}. \tag{2.74}$$

2.6.1 Forces de frottement

Dans l'Exemple 6, nous avons considéré une force de frottement agissant sur une boîte alors que nous l'avons négligé dans tous autres exemples. Dans la plupart des situation les corps sont soumis à des forces de frottement. Il existe beaucoup de forces de frottement de nature différentes et nous allons en discuter quelques une ici.

2.6.2 Force de frottement cinétique

Ici, nous allons nous concentrer d'abord sur les forces de frottement *cinétiques* qui s'applique sur les objets glissant sur une surface. Elles sont dues à la nature rugueuses de la surface de contact entre un objet et une surface.

Lorsqu'un objet glisse sur une surface, la force de frottement cinétique agit dans la direction opposée au mouvement. La norme de la force dépend de la nature de la surface et de l'objet. Elle dépend de la force normale de la surface sur l'objet (également appelé poids apparent de l'objet). Lorsqu'on glisse un objet sur une surface il y a donc 4 forces en jeu (voir la fig. 2.32). Le poids de l'objet, $\vec{F}_g$, la force avec laquelle on glisse l'objet, $\vec{F}$, le poids apparent, $\vec{F}_N$, et la force de

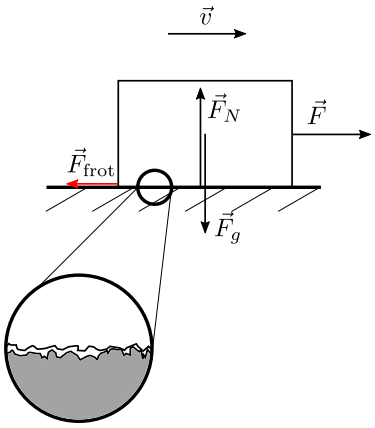

Figure 2.32: Une boite glissant sur une surface tirée par une force $\vec{F}$, qui a une force de gravité $\vec{F}_g$ et une force normale $\vec{F}_N$, et une force de frottement $\vec{F}_{\text{frot}}$. Même si les surfaces ont l'air complètement lisses au niveau microscopique elles ne le sont pas.

frottement $\vec{F}_{\text{frot}}$. Dans le modèle que nous considérons ici la force de frottement ne dépend pas de la surface de contact entre l'objet et le sol.

Une relation phénoménologique relie la norme de F_N et F_{frot}

$$F_{\text{frot}} = \mu_k F_N, \tag{2.75}$$

où μ_k est le coefficient de frottement cinétique[2].

Remarque 1

Il est important de noter que cette équation n'est *pas* vectorielle, car la force de frottement et la force normale sont perpendiculaire l'une avec l'autre.

Le coefficient de frottement dépend évidemment des deux surfaces qui sont en contact, si elles sont mouillées, si elles ont été polies ou non, etc. Mais dans ce contexte μ_k ne dépend pas de la vitesse de l'objet, ni de la surface de contact.

2.6.3 Force de frottement statique

Nous avons d'abord considéré la force de frottement cinétique entre un objet *en mouvement* et une surface. Lorsque l'objet n'est pas en mouvement cette force est différente et s'appelle la force de *frottement statique*. Comme l'objet n'est pas en mouvement il ne peut y avoir de force de frottement cinétique. Lorsque vous essayez de déplacer une grosse armoire mais quelle refuse de bouger alors que vous poussez dessus, cela signifie qu'une autre force doit être présente qui empêche le mouvement. Lorsque finalement, vous appliquez une force suffisante,

[2] A titre d'exemple, pour un contact bois sur bois, on a $\mu_k = 0.2$, pour du caoutchouc sur du béton $\mu_k = 0.8$, et pour les jointures des articulation $\mu_k = 0.01$.

vous arrivez à débloquer la situation: à vaincre la force de frottement statique maximale et l'armoire se met à glisser.

La force de frottement statique maximale s'exprime de façon similaire à la force de frottement cinétique

$$F_{\text{frot,max}} = \mu_s \cdot F_N, \tag{2.76}$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique[3]. On a donc que la force de frottement statique est

$$F_{\text{frot}} \leq \mu_s \cdot F_N. \tag{2.77}$$

Vous avez sans doute remarqué qu'une fois que nous avons réussi à mettre en mouvement la fameuse grosse armoire, il est plus simple de continuer à la faire glisser. Ceci est dû en général au fait que le coefficient de frottement statique est plus grand que le coefficient de frottement cinétique.

Si on se place dans la situation de la fig. 2.33 et qu'on fait varier la force $\vec{F}$ avec laquelle on essaie de déplacer la boîte et qu'on mesure la force de frottement, il y a 2 comportement différents (voir la fig. 2.34). Dans un premier temps quand $\vec{F} < \vec{F}_{\text{frot,max}}$, on a que $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{frot}}$. Puis une fois le seuil de la force de frottement statique maximale dépassé, l'objet se met en mouvement, et la force la force de frottement statique est remplacée par la force de frottement cinétique, ce qui a souvent comme effet de diminuer la force de frottement.

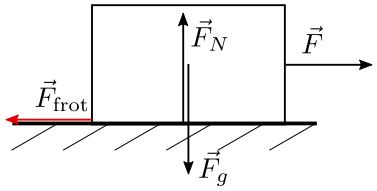

Figure 2.33: Une boite surface tirée par une force $\vec{F}$, qui a une force de gravité $\vec{F}_g$ et une force normale $\vec{F}_N$, et une force de frottement $\vec{F}_{\text{frot}}$.

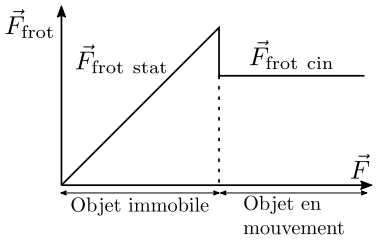

Figure 2.34: La force de frottement, $\vec{F}_{\text{frot}}$, en fonction de la force appliquée pour mettre en mouvement la boîte, $\vec{F}$.

Exemple 8 *(Frottement statique/cinétique)*

[3]A titre d'exemple, pour un contact bois sur bois, on a $\mu_s = 0.4$, pour du caoutchouc sur du béton $\mu_s = 1$, et pour les jointures des articulation $\mu_s = 0.01$.

Soit le cas dessiné à la fig. 2.33. On pose une boite de $m = 10$ kg sur un sol horizontal. Les coefficients de frottement cinématiques et statiques sont donnés par $\mu_k = 0.3$ et $\mu_s = 0.4$. Déterminer la force de frottement et l'accélération de la boîte si la force $\vec{F}$ est égale à 0 N, 10 N, 20 N, 38 N, et 40 N.

Solution 8 *(Frottement statique/cinétique)*

La force statique maximale est donnée par

$$F_{\text{frot,max}} = \mu_s \cdot F_N = 0.4 \cdot 10 \cdot 9.8 = 39.2 \text{ N}. \tag{2.78}$$

Les 4 premières force ci-dessus seront donc inférieures à ce seuil et la force de frottement sera $-\vec{F}$ grâce à la deuxième loi de Newton. Lorsque $\vec{F}$ dépasse 39.2 N, la force de frottement devient la force de frottement cinétique. On a donc

$$F_{\text{frot}} = \mu_k \cdot F_N = 0.3 \cdot 10 \cdot 9.8 = 29.4 \text{ N}. \tag{2.79}$$

On a donc qu'on a une force résultante non-nulle sur la boite

$$F_{\text{res}} = F - F_{\text{frot}} = 40 - 29.4 = 10.6 \text{ N}. \tag{2.80}$$

Et donc la boite va accélérer avec un accélération

$$a = F_{\text{res}}/m = 10.6/10 = 1.06 \text{ m/s}^2. \tag{2.81}$$

Question 5 *(Luge)*

Est-il plus facile de pousser ou de tirer une luge? Pourquoi?

Réponse 5 *(Luge)*

Tirer la luge, car lorsque nous poussons nous avons tendance à "enfoncer" la luge dans le sole et donc augmenter le frottement. A l'inverse quand on tire la luge, on a tendance à la soulever et donc à diminuer le frottement.

Exemple 9 *(Plan incliné)*

Afin de complexifier un peu plus encore les cas d'application de la force de frottement considérons le cas du plan incliné (voir la fig. 2.35). Soit une boite de masse m posée sur un plan incliné qui forme un angle θ avec l'horizontale. La force de gravité agit toujours dans la direction verticale, alors qu'ici la force normale du plan sur la boite n'est pas verticale mais est perpendiculaire au plan incliné. On aura donc que le frottement sera plus faible que lorsque le plan est horizontal, car la composante verticale de la force normale sera plus faible. Calculer l'accélération de la boite si le coefficient de frottement cinétique est de $\mu_k = 0.1$.

Solution 9 *(Plan incliné)*

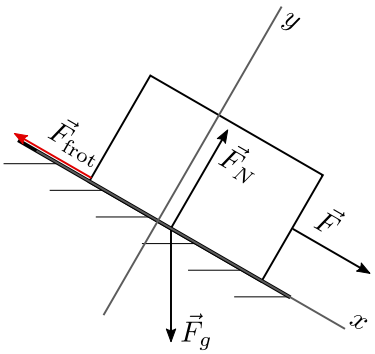

Figure 2.35: Une boite de masse m posée sur un plan incliné. Les axes sont alignés sur la tangente et la normale du plan.

Il est plus simple de placer les axes parallèle et normal au plan. Ainsi la force de gravité sera la seule qui ne sera pas alignée sur un des axes. Nous avons donc que la force de gravité est donnée par

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

Dans la direction x, le bilan de force est donné par

$$\begin{aligned} F_{g,x} - F_{\text{frot},x} &= ma_x, \\ mg\sin\theta - F_N\mu_k &= ma_x, \\ mg\sin\theta - F_N\mu_k &= ma_x. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Afin de résoudre cette équation, il nous manque F_N. Regardons la composante x de la force

$$\begin{aligned} F_{g,y} + F_N &= ma_y = 0, \\ -mg\cos\theta + F_N &= 0, \\ F_N &= mg\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.84}$$

En remplaçant cette relation dans l'éq. 2.83 on obtient

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - mg\cos\theta\mu_k &= ma_x, \\ g(\sin\theta - \cos\theta\mu_k) &= a_x, \\ a_x &= 9.8\cdot(\sin(30) - 0.1\cdot\cos(30)) = 4.05\ \text{m/s}^2. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Il existe beaucoup d'autres types de forces de frottement. Elles sont pour la plupart responsables du mauvais rendement de la plupart de nos appareils d'utilisation quotidienne ou de nos moyens de transports. Néanmoins les forces de frottement sont également nécessaires pour nos déplacements. Sans la force de frottement nous ne pourrions pas marcher. Il suffit de voir la difficulté à se déplacer quand nous nous trouvons sur une surface très glissante (où la force de frottement est très faible).

2.6.4 Frottement visqueux

L'autre frottement auquel nous avons à faire au quotidien est le frottement visqueux. Il apparaît lorsque deux solides sont mis en contact via un lubrifiant ou qu'un corps est en mouvement dans un fluide.

Si nous considérons le mouvement d'un objet dans un fluide. En première approximation, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse de l'objet et dans le sens opposé du mouvement

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -k \cdot \vec{v}, \tag{2.86}$$

où k est coefficient de résistance de l'objet dans le fluide. Il dépend de la forme de l'objet, de la viscosité du fluide, ainsi que de la facilité de l'objet à pénétrer dans le fluide.

Lorsqu'un objet tombe en chute libre dans l'air, il ne va pas accélérer indéfiniment. Au fur et à mesure que sa vitesse augmente la force de frottement va augmenter jusqu'à être égale en norme à la force de gravité. La force résultante sur l'objet devenant nulle, il n'y aura plus d'accélération et la vitesse restera constante. On appelle cette vitesse la vitesse limite.

On peut la calculer à l'aide de la deuxième loi de Newton

$$\begin{aligned} F_{\text{frot}} - F_g &= 0, \\ kv_{\text{lim}} - mg &= 0, \\ v_{\text{lim}} &= \frac{mg}{k}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Exemple 10 *(Le parachutiste)*

Calculer la vitesse limite d'un parachutiste de masse de $m = 80$ kg si son coefficient de résistance est de $k = 10$kg/s.

Solution 10 *(Le parachutiste)*

La vitesse limite se calcule à l'aide de la formule précédente

$$v_{\text{lim}} = \frac{80 \cdot 9.8}{10} = 78.4 \text{ m/s} = 282 \text{ km/h}. \tag{2.88}$$

2.7 Questions

1. Si une personne se tient sur un skateboard à l'arrêt. Pourquoi tombe-t-elle vers l'arrière si on pousse soudainement le skate vers l'avant?
2. Si un objet est en mouvement, est-il possible que la force résultante sur l'objet soit nulle?
3. Si l'accélération d'un objet est nulle, est-ce que cela veut dire qu'il n'y a aucune force qui agit sur l'objet?

4. Si une seule force agit sur un objet. Peut-il avoir une accélération nulle? Une vitesse nulle?
5. Si un objet est suspendu à une petite cordelette et on attache une seconde cordelette à ce même objet et on la laisse pendre. Si on tire d'un coup sec sur la seconde cordelette une des deux va se rompre. Laquelle a le plus de chance de se casser?
6. La force de gravité sur un caillou de 2 kg est supérieure à celle d'un caillou de1 kg. Pourquoi alors les deux tombent-ils à la même vitesse?
7. On tire une boite posée sur un plan horizontal avec une force parallèle au plan et on néglige les frottements. Si maintenant on tire la boite avec un certain angle est-ce que l'accélération sera plus élevée, plus faible, la même? Que se passe-t-il s'il y a une force de frottement?
8. Pourquoi est-ce que la distance de freinage d'un train est plus longue que celle d'une voiture allant à la même vitesse?

Travail pratique 2 *(Calcul de force résultante)*

Générer un tableau contenant N particules, numérotées p_i, représentées par leur masse m_i et leur position $\vec{r}_i$, sachant que:

- La position des particules est aléatoire dans le domaine $[0, 10] \times [0, 10]\text{m}^2$.
- La masse des particules est aléatoire dans le domaine $[0, 10]\text{kg}$.

1. Calculer la force résultante dûe à l'attraction gravitationnelle sur chaque particule

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij}, \tag{2.89}$$

où $\vec{F}_{ij}$ est la force gravitationnelle entre la particule i et la particule j, et est donnée par

$$\vec{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{||\vec{r}_{ij}||^3}\vec{r}_{ij}, \tag{2.90}$$

où $\vec{r}_{ij}$ est le vecteur reliant la particule i à la particule j, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ est la constante universelle de gravitation.

2. Si chaque particule, p_i, a de plus une vitesse $\vec{v}_i$, calculer la force résultante sur chaque particule si $k = 10\text{kg/s}$ (k est le coefficient de résistance de l'objet dans le fluide).

3. Calculer ces forces si le domaine est périodique, c'est à dire si $x + 10 = x$ et $y + 10 = y$.

4. Utiliser la librairie `SDL2` pour afficher les particules à l'écran (un pixel blanc par particule).

2.8 Mouvement circulaire et gravitation

Nous avons vu qu'un objet se déplacera en ligne droite dans deux cas:

1. Si on lui applique une force résultante dans la direction de son déplacement.
2. Si la force résultante qui lui est appliquée est nulle.

Dans tout autre cas, l'ojet suivra une trajectoire incurvée. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à un cas particulier: celui du mouvement circulaire et du cas particulier du mouvement orbital (quasi-circulaire) des objets célestes tels que le mouvement de la lune autour de la terre ou de la terre autour du soleil.

2.8.1 La cinématique du mouvement circulaire

Un objet qui se déplace à vitesse constante v (la norme de la vitesse est constante) et suivant une trajectoire circulaire est en **mouvement circulaire uniforme**. Il est primordial de réaliser que bien que la norme de la vitesse est constante, la direction de la vitesse change constamment étant donné que l'objet bouge le long d'un cercle. Dès lors, il subit pune accélération, bien que la norme de la vitesse soirt constante. Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses mesurées de l'objet sur un cercle, et la mesure est décalée d'un temps Δt, alors son accélération est donnée par

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \tag{2.91}$$

On peut se convaincre à l'aide d'un petit dessin que si Δt est suffisamment petit, alors $\Delta \vec{v}$ pointe vers le centre du cerle et donc $\vec{a}$ pointe également vers le centre du cercle (l'équation ci-dessus nous l'assure en effet). On va alors noter $\vec{a}_R$ l'accélération **radiale** subie par l'objet. La norme de l'accélération radiale est donnée par

$$a_R = \frac{v^2}{r}, \tag{2.92}$$

où r est le rayon du cercle le long duquel se déplace l'objet. Ainsi un objet se réplaçant le long d'un cercle de rayon r subit une accélération dirigée vers le centre du cercle, et de norme $a_R = v^2/r$. Plus le cercle est grand et moins l'accélération est forte (le changement de direction est plus faible) et plus la vitesse est forte plus il faut accélérer pour changer de direction abruptement.

Il faut également noter que la vitesse pointe **toujours** dans le direction tangentielle au cercle et ainsi l'accélération et la vitesse sont perpendiculaires. On peut également décrire le mouvement circulaire en terme de la fréquence ou de la période de révolution de l'objet. Ainsi, si l'objet fait un tour du cercle en un temps T (la période du mouvement est T) la fréquence, f, sera donnée par

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.93}$$

On aura donc que la vitesse de l'onbet sera donnée par la distance parcourue par tour sur le temps d'une révolution

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f. \tag{2.94}$$

Exemple 11 *(Mouvement circulaire)*

Soit une balle pesant 2kg, attachée à une corde de longueur de 50cm et que la balle fait 3 tours par seconde. Quelle est l'accélération radiale qu'elle subit?

Solution 11 *(Mouvement circulaire)*

On sait que $a_R = v^2/r$ et que $v = 2\pi r f$. De l'énoncé on a $f = 3\ \mathrm{s}^{-1}$ et $r = 0.5\mathrm{m}$. Il vient donc

$$a_R = 4\frac{\pi^2 r^2 f^2}{r} = 4\pi^2 r f^2 = 2\pi^2 9 = 18\pi^2 \cong 178\mathrm{m/s}^2. \tag{2.95}$$

Exercice 12 *(Mouvement criculaire bis)*

De quel facteur change l'accélération de la balle si on double la longueur de la corde?

Exercice 13 *(La lune)*

La lune a une orbite quasi circulaire autour de la terre. Sachant que la distance terre-lune est de 384′000km et que sa période est de 27*jours* (environ). Quelle est l'accélération de la lune vers la terre?

2.8.2 La dynamique du mouvement criculaire

Voyons à présent ce qu'on peut dire sur la description du système d'un point de vue de la dynamique (des forces).

Question 6 *(Que vaut la force dans le mouvement circulaire?)*

Que peut-on dire sur la force résultante que subit un objet en mouvement sur un cercle de rayon r et qui bouge à vitesse v?

Réponse 6 *(Que vaut la force dans le mouvement circulaire?)*

Nous savons de la 2e loi de Newton que $\vec{F}_{\mathrm{res}} = m \cdot \vec{a}$. Ainsi, comme nous savons que $\vec{a}$ pointe dans la direction du centre du cercle et que sa norme vaut $||\vec{a}|| = v^2/$,

nous avons que la norme de la force résultante vaut

$$F_{\text{res}} = m\frac{v^2}{r}. \tag{2.96}$$

Cette force agit vers le **centre** du cercle et non vers l'extérieur (ce qui pourrait si on se fie à notre intuition). En effet, bien que la force qu'on ressent quand on est dans une voiture qui tourne paraît être vers "l'extérieur", il s'agit en fait de la force à appliquer pour ne pas aller en ligne droite (qui est le mouvement naturel des objets).

Exemple 12 *(La balle qui tourne)*

Soit une balle attachée à une ficelle, de masse $m = 1\text{kg}$, suivant un mouvement circulaire de rayon $r = 1\text{m}$, mettant 10s pour effectuer un tour. Quelle est la force que subit la balle?

Solution 12 *(La balle qui tourne)*

Nous savons que la balle subit une force

$$F\text{res} = ma_R = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(2\pi r)^2}{T^2}\frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2}{100} \cong 0.395\text{N}. \tag{2.97}$$

2.8.3 La loi de la gravitation universelle

Partant de l'observation que les objets qui tombent sur terre accélèrent, Newton, a également émi l'hypothèse qu'ils devaient subir une force, la force de *gravité*. De plus cette force s'applique toujours vers le centre de la terre, peu importe sa position sur la surface de la terre. Ainsi, il conclut que la terre elle-même exerce une force sur les objets qui se trouvent à sa surface.

On sait que l'accélération subie par un objet à la surface de la terre est donnée par $g = 9.81\text{m/s}^2$. De ce qu'on a calculé plus haut (enfin ça c'est si vous avez fait l'exercice), on sait que l'accélération de la lune est de $a_R = 0.00272\text{m/s}^2$. On peut écrire le rapport entre ces deux accélérations

$$\frac{g}{a_R} \cong 3600. \tag{2.98}$$

Il se trouve que le rapport entre le rayon de la terre (6400km) et la distance entre la terre et la lune (384000km) est d'environ 1/60. Il se trouve que $1/60^2 = 1/3600$. Coïncidence? Je ne crois pas.

En fait, il se trouve que ce n'est pas un hasard mais on y reviendra plus tard. On a que la force de gravité entre la lune et la terre est donc proportionnelle au carré de l'inverse de la distance entre les deux

$$F_{\text{grav}} \sim 1/r^2. \tag{2.99}$$

De plus cette force doit être reliée à la masse de la lune et de la terre. Comme en vertu du principe d'action réaction la force sur la terre et sur la lune est la même. Ainsi, il peut sembler naturel que cette force soit proportionnelle au produit des masses de chacun des deux objets

$$F_{\text{grav}} \sim \frac{m_{\text{terre}} m_{\text{lune}}}{r^2}, \tag{2.100}$$

La direction de cette force est le long de la droite qui relie les deux objets et que la force est **toujours** attractive.

De cette observation et d'observation similaire pour le couple terre-soleil, Newton poustla la **loi de la gravitation universelle** qui dit que *chaque particule dans l'univers attire chaque autre particuleavec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversément proportionnelle au carré de la distance qui les séparent et dont la direction est le long de la droite qui les relie.* Ainsi la loi de la gravitation universelle s'écrit

$$F_{\text{grav}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.101}$$

avec m_1, m_2 les masses des deux particules et r la distance entre les deux. G est appelée la constant de la gravitation universelle et a été déterminée expérimentalement comme valant

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}. \tag{2.102}$$

Exercice 14 *(Avec son · sa voisin · e)*

Que vaut la force d'attraction que vous exercez sur votre voisin · e?

Exercice 15 *(Satellites)*

Quelle doit être la vitesse d'un satellite, de masse m_s, dont l'orbite est circulaire et est à une distance r de la terre, dont la masse est m_T? A quelle distance doit se trouver le satellite si l'orbite est géostationnaire?

2.9 Les équations du mouvement

Les lois de Newton, nous permettent de décrire des systèmes très complexes, comme le déplacement des planètes dans le système solaire, ou les gaz de particules. Dans cette section nous allons voir comment.

Pour ce faire, nous allons considérer une particule P en mouvement, qui est caractérisée par une position $\vec{r}(t)$ (qui dépend donc du temps, t) et par une masse m constante. Nous souhaitons ici décrire le mouvement de P en fonction du temps, en d'autre termes la valeur de $x(t)$ pour toute valeur de t. Il existe

différents cas de figures, tels que mouvement rectiligne uniforme, ou le mouvement réctiligne uniformément accéléré, que vous connaissez qui permettent de résoudre exactement le mouvement de P. Ici, nous souhaitons généraliser un petit peu tout ça, en supposant que la vitesse et l'accélération de la particule dépendent également du temps, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$. Pour les besoins de ce cours, nous allons utiliser des *approximations* numérique des valeurs de $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.

Pour simplifier, nous allons *discrétiser* le temps. Au lieu de laisser le temps prendre n'importe quelle valeur réelle positive, $t \in \mathbb{R}^+$, il ne pourra prendre que les valeurs suivantes:

$$t_j = j \cdot \delta t, \tag{2.103}$$

$\delta t > 0$ étant le pas de discrétisation temporel et $j \in \mathbb{Z}^+$ (voir fig. 2.36).

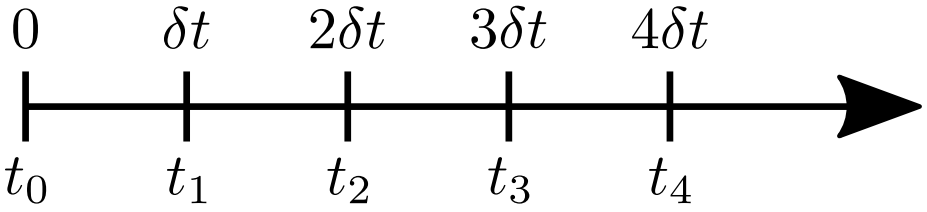

Figure 2.36: Illustration de la discrétisation temporelle.

2.9.1 Le mouvement sans accélération

Supposons que pour notre particule P, nous connaissons sa position initiale, $\vec{r}(0)$ et sa vitesse en tout temps, $\vec{v}(t)$. Nous souhaitons connaître une approximation de la position $\vec{r}(t_j)$. Pour ce faire nous commençons au point $\vec{r}(0)$ et calculons sa nouvelle position à l'aide de la vitesse $\vec{v}(0)$

$$\vec{r}(\delta t) = \vec{r}(0) + \delta t \cdot \vec{v}(0). \tag{2.104}$$

Plus δt est petit, plus cette approximation sera précise. En utilisant la notation $t_j = j \cdot \delta t$, on obtient

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \delta t \cdot \vec{v}(t_0). \tag{2.105}$$

Remarque 2 *($\delta t \to 0$)*

On peut réécrire l'équation ci-dessus comme

$$\vec{v}(0) = \frac{\vec{r}(\delta t) - \vec{r}(0)}{\delta t}. \tag{2.106}$$

En prenant la limite $\delta t \to 0$, on obtient

$$\vec{v}(0) = \vec{r}\,'(0), \tag{2.107}$$

Soit la relation bien connue que la dérivée de la position donne la vitesse. Ou encore de façon similaire

$$\vec{v}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0), \tag{2.108}$$

Nous pouvons ainsi calculer la position pour t_2[4]

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \delta t \cdot \vec{v}(t_1), \tag{2.109}$$

et ainsi de suite pour n'importe quelle valeur de t_j

$$\vec{r}(t_j) = \vec{r}(t_{j-1}) + \delta t \cdot \vec{v}(t_{j-1}). \tag{2.110}$$

De cette équation, nous pouvons également déduire que

$$\vec{v}(t_{j-1}) = \frac{\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})}{\delta t}, \tag{2.111}$$

ou encore

$$\vec{v}(t_j) = \frac{\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)}{\delta t}. \tag{2.112}$$

Nous pouvons ainsi approximer le mouvement de la particule P pour tout instant t_j. A l'inverse en connaissant la position de la particule à tous les t_j, nous pouvons calculer sa vitesse.

2.9.2 Le mouvement avec accélération

De façon similaire à ce que nous avons fait pour le lien entre la position et la vitesse, nous pouvons faire le lien entre l'accélération et la vitesse. En connaissant la vitesse de la particule P à tout instant $\vec{v}(t_j)$, nous pouvons approximer l'accélération $\vec{a}(t_j)$ comme

$$\vec{a}(t_j) = \frac{\vec{v}(t_j) - \vec{v}(t_{j-1})}{\delta t}. \tag{2.113}$$

En utilisant l'éq. 2.111 et l'éq. 2.112, il vient

$$\vec{a}(t_j) = \frac{\frac{\vec{r}(t_j+1)-\vec{r}(t_j)}{\delta t} - \frac{\vec{r}(t_j)-\vec{r}(t_{j-1})}{\delta t}}{\delta t} = \frac{\vec{r}(t_{j+1}) - 2\vec{r}(t_j) + \vec{r}(t_{j-1})}{\delta t^2}. \tag{2.114}$$

En isolant $\vec{r}(t_{j+1})$ il vient

$$\vec{r}(t_{j+1}) = 2\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1}) + \vec{a}(t_j)\delta t^2. \tag{2.115}$$

Cette équation est connue sous le nom de *schéma de Verlet*. Cette formule est correcte pour $j \geq 1$. Pour $j = 0$, on a

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \delta t\vec{v}(t_0) + \vec{a}(t_0)\delta t^2. \tag{2.116}$$

Il est donc nécessaire de connaître la vitesse initiale et la position initiale de la particule P pour pouvoir calculer son évolution, ainsi que son accélération en tout temps t_j. Afin de calculer l'accélération de la particule P, on utilise souvent les lois de Newton. Ainsi,

$$\vec{a}(t_j) = \frac{\vec{F}(t_j)}{m}. \tag{2.117}$$

[4]Cette équation peut aussi s'écrire $\vec{x}(2\delta t) = \vec{x}(\delta t) + \delta t \cdot \vec{v}(\delta t)$.

Exemple 13 *(Mouvement parabolique)*

Comparer la position d'un objet $\vec{s}_{\text{exact}}$

$$\vec{s}_{\text{exact}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\vec{a}_x t^2 + v_{0x} t \\ \frac{1}{2}\vec{a}_y t^2 + \vec{v}_{0y} t \end{pmatrix}, \tag{2.118}$$

soumis à une accélération

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \text{m/s}^2, \tag{2.119}$$

et

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m/s}, \tag{2.120}$$

après un temps $t = 0.2$s et ce qu'on obtient avec l'équation de Verlet pour $\delta t = 0.1$ et $\delta t = 0.05$.

Solution 13 *(Mouvement parabolique)*

Après $t = 0.2$s l'ojet se trouve à

$$\vec{s}_{\text{exact}} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.0 \end{pmatrix} \text{m}. \tag{2.121}$$

Pour l'approximation de Verlet, on doit d'abord initialiser le problème, soit calculer $\vec{s}_0 = \vec{s}(t = 0)$ et $\vec{s}_1(t = \delta t)$. On a

$$\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}, \tag{2.122}$$

et pour $\delta t = 0.1$

$$\vec{s}_1(\delta t = 0.1) = \vec{s}_0 + \delta t \vec{v}(t_0) + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.01 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \end{pmatrix} \text{m}. \tag{2.123}$$

On obtient donc pour $\vec{s}_2(t = 2\delta 2)$ on a

$$\vec{s}_2(\delta t = 0.1) = 2\vec{s}_1 - \vec{s}_0 + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.01 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} \text{m}. \tag{2.124}$$

De même pour $\delta t = 0.05$ on a

$$\vec{s}_1(\delta t = 0.05) = \vec{s}_0 + \delta t \vec{v}(t_0) + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.0025 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.0025 \end{pmatrix} \text{m}. \tag{2.125}$$

Et ensuite les différentes étape $\vec{s}_2 = \vec{s}(t = 2\delta t)$, $\vec{s}_3 = \vec{s}(t = 3\delta t)$, $\vec{s}_4 = \vec{s}(t = 4\delta t)$

$$\vec{s}_2(\delta t = 0.05) = 2\vec{s}_1 - \vec{s}_0 + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.0025 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.025 \end{pmatrix} \text{m}, \tag{2.126}$$

$$\vec{s}_3(\delta t = 0.05) = 2\vec{s}_2 - \vec{s}_1 + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.05 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.0025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.0 \end{pmatrix} \text{m}, \tag{2.127}$$

$$\vec{s}_4(\delta t = 0.05) = 2\vec{s}_3 - \vec{s}_2 + \vec{a}\delta t^2 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.0025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.05 \end{pmatrix} \text{m}. \tag{2.128}$$

On voit que bien que $\vec{s}_4(\delta t = 0.05) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.05 \end{pmatrix}$ soit toujours faux par rapport à la solution exacte, elle est plus proche de la solution que $\vec{s}_2(\delta t = 0.1) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix}$.
On constate également que si on a pas d'accélération, la position trouvée est **exacte**.

Travail pratique 3 *(Mouvement des particules)*

1. Implémenter le mouvement des particules en utilisant les formules ci-dessus.
2. Implémenter les fonctions permettant d'initialiser un tableau de particules avec une position $\vec{r}$, une masse m, et une $\vec{v}$ donnée (attention, la vitesse doit être cohérente avec celle de l'éq. 2.111).
3. Créer une galaxie avec un "trou noir" en son centre (il a une masse très très très grande par rapport au reste) et des étoiles tournant autour qui ont des positions et des masses aléatoires. En déduire leurs vitesses pour qu'elles "tournent" autour du trou noir sans s'en rapprocher (elles sont en orbite autour).

Chapitre 3

La charge électrique et le champs électrique

Les forces électriques sont omniprésentes dans notre vie de tous les jours. Elles permettent d'allumer des ampoules, de faire fonctionner les ordinateurs, de faire tourner des moteurs, … Elles sont aussi responsables des interactions interatomiques pour que des amas d'atomes forment des solides ou les liquides. En réalité un certain nombre des forces que nous avons considéré dans le chapitre précédent sont le résultat des interactions électriques au niveau atomique (la force de frottement par exemple).

3.1 L'électricité statique et la conservation de la charge électrique

Lorsqu'on frotte un ballon de baudruche contre sa tête, on constate que les cheveux ont tendances à rester attachés au ballon plutôt que de tomber vers le sol sous l'effet de la gravité. On dit aujourd'hui que les cheveux se dressent sous l'effet de l'**électricité statique**. En réalité, sous l'effet du frottement, le ballon comme les cheveux deviennent "chargés": ils possèdent une **charge électrique**.

Il existe *deux* types de charges électriques: la charge *positive* et la charge *négative*. Des objets possédant une charge de *même* type ont tendance à se repousser, alors que ceux possédant des charges *opposées* ont tendance à s'attirer mutuellement.

L'expérience de charger un objet en le frottant peut amener à charger positivement ou négativement un objet. Ainsi, on dit qu'une baguette en verre est chargée *positivement*, alors qu'une baguette en plastique est chargée *négativement*. Ce choit est totalement arbitraire et a été choisi par B. Franklin (au 18e siècle) qui a été un des premiers à faire ce type d'expériences.

Avant de frotter ses cheveux contre un ballon et de rendre les cheveux et le ballon chargés, on constate qu'il n'y a pas d'attraction particulière entre ces deux objets. Cela signifie que ni l'un ni l'autre ne sont chargés. En fait le frottement va donner une charge *égale et opposée* à chaque objet.

Cela est une conséquence de la loi de la conservation de la charge électrique qui dit que

- La charge totale produite par un processus est nulle,

ou en d'autres termes

- Aucune charge ne peut être créée ou détruite.

En pratique cela signifie que si une région de l'espace acquière une charge positive, une autre région aura acquis dans le même temps la même charge mais négative.

Question 7 *(D'autres lois de conservation)*

Connaissez-vous d'autres lois de conservation?

Réponse 7 *(D'autres lois de conservation)*

La conservation de l'énergie, de la masse, de la quantité de mouvement, ...

3.2 La charge électrique dans les atomes

Un modèle simplifié d'un atome postule qu'un atome possède un noyau chargé positivement (composé de protons et de neutrons, ces derniers n'ont pas de charge) autour duquel tournent les électrons chargés négativement (voir fig. 3.1). Les protons ont exactement la même charge électrique que les électrons mais inversée. Ainsi les atomes n'ont pas une charge nette.

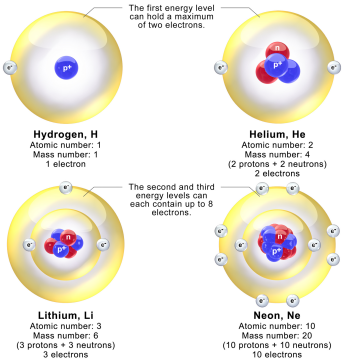

Figure 3.1: Illustration du modèle de l'atome de Bohr. Source: Wikipedia

Sous l'effet du frottement (entre autres) un atome peut perdre ou gagner des électrons. Il devient ainsi positivement ou négativement chargé (respectivement), et est appelé un *ion*. Les atomes dans un solide ont une structure cristalline (ils ne peuvent quasiment pas bouger). De plus, dans des isolants, les électrons sont

également fortement attachés à leurs noyaux, alors que dans des conducteurs, ils sont libres de se mouvoir à la surface du solide. Ainsi, lorsqu'on frotte un isolant (un ballon) avec un autre isolant (les cheveux), des électrons sont transférés de l'un vers l'autre ce qui conduit à un transfère net de charge. Cette charge nette ne dure pas indéfiniment, car les électrons en trop sont diffusés dans l'air, attirés par les molécules d'eau en général.

3.3 Isolants et conducteurs

Si nous sommes en présence de deux objets métalliques, un chargé électriquement et un autre neutre, et qu'on connecte les deux objets à l'aide d'un fil métallique, on constate que l'objet non chargé devient rapidement chargé. À l'inverse, si on connecte les deux objets métalliques avec un morceau de plastique, la charge de l'objet neutre ne changera pas.

Les objets métalliques sont de bons *conducteurs* d'électricité, alors que le plastique est un *isolant* (il conduit mal l'électricité). Il existe également une sorte intermédiaire qui est à mi-chemin entre isolant et conducteur: les *semi-conducteurs*. Le silicium entre dans cette catégorie par exemple (le silicium est un composant très important des ordinateurs). Nous parlerons des semi-conducteurs plus tard dans ce cours.

La différence entre isolant et conducteur au niveau atomique est la suivante. Les électrons dans un isolant sont très fortement attachés au noyau. Pour un conducteur en revanche, certains électrons ont un lien beaucoup plus faible avec le noyau et peuvent se déplacer librement à la surface du matériau conducteur (mais pas s'en détacher). Ces électrons sont appelés *électrons libres*. Ainsi, un matériau chargé qui entre en contact avec un conducteur va avoir pour effet de déplacer les électrons de celui-ci. Si la charge est positive, les électrons se déplaceront vers la charge, à l'inverse ils s'en éloigneront si la charge est négative.

Pour en revenir à notre exemple du début de la section, lorsqu'un conducteur neutre, N, est mis en contact avec un autre conducteur chargé positivement, C, le conducteur N deviendra également positivement chargé. En effet, lorsque N et C sont mis en contact, les électrons de N sont attirés par la charge positive de C, et certains passeront de N à C, diminuant la charge nette de C et augmentant la charge positive de N, jusqu'à ce que N et C aient la même charge. Ce processus est appelé charge par *conduction*, car les deux conducteurs sont en contact direct.

Si maintenant les deux objets sont rapprochés, mais sans être mis en contact. Les électrons libres ne vont pas quitter le conducteur N pour rejoindre le conducteur C. En revanche, les électrons de N seront attirés par le conducteur C et se déplaceront en direction de C, créant ainsi deux zones à l'intérieur de N: une chargée négativement proche de C, et une positivement éloignée de C. Néanmoins, la charge nette de N reste toujours la même, c'est à dire nulle. Ce processus est appelé charge par *induction*.

Question 8 *(Charger un conducteur)*

Pouvez-vous imaginer un processus pour charger un conducteur en utilisant la

charge par induction?

Réponse 8 *(Charger un conducteur)*

Ce processus permet de charger un objet assez facilement. Pour ce faire, il faut connecter l'objet à l'aide d'un conducteur à la Terre[1] (à l'aide d'un fil par exemple). Puis, en utilisant la charge par induction, les électrons vont quitter (ou pénétrer) le conducteur depuis la Terre. Puis, il suffit de couper le fil et le tour est joué.

3.4 La loi de Coulomb

Dans les précédentes sections, nous avons vu la phénoménologie de la force que les charges électriques peuvent exercer entre elles. Ces forces peuvent être attractives ou répulsives, mais nous ne savons pas encore quelle peut être la magnitude de cette force.

Question ouverte 1 *(Force électrique)*

De quoi dépend la force électrique à votre avis?

La force électrique a été étudiée par Charles Coulomb au 18e siècle (1780 environ) à l'aide d'une *balance à torsion*. Cette balance est basée sur le même principe qu'une balance pour la gravitation, mais adaptée à la force électrique (une vidéo décrivant l'expérience peut se trouver sur ce lien).

Un axe avec une boule conductrice à une extrémité est suspendue à un long fil très fin. Le dispositif est enfermé dans une cloche en verre limitant ainsi les courants d'air. Dans cette cloche, on peut introduire un autre conducteur chargé. Lorsque les boules sont mises en contact, la charge est répartie entre les deux objet et ils se repoussent. Cette force induit une torsion du fil et on peut ainsi mesurer l'amplitude de la force. Ainsi, on peut mesurer la torsion du fil sous l'effet de la force électrique. En variant la distance de départ entre les charges, et en utilisant plus d'objets, Coulomb a pu déterminer sa loi reliant la force électrique avec la distance et la charge.

Coulomb énonce que la force électrique entre deux object de charges Q_1, et Q_2 est proportionnelle au produit des charges en présence et inversément proportionnelle au carré de la distance, r, qui les sépare[2]. Cela peut s'écrire sous la forme

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}, \tag{3.1}$$

[1] La Terre conduit suffisamment bien et est tellement grande qu'elle agit comme un *réservoir* infini ou un *puit* infini à électrons.

[2] Si la distance est doublée la force est divisée par quatre.

où k est la constante de proportionnalité. Une autre grandeur apparaît souvent dans la littérature, la *permittivité du vide*, ϵ_0, qui est relié à k par la relation

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{3.2}$$

avec $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$. La force est toujours dans la direction de la ligne reliant les deux charges.

Exercice 16 *(Attraction-répulsion)*

A l'aide de la formule ci-dessus. Pouvez-vous faire un schéma de deux charges, Q_1 et Q_2, ainsi que de la force de Q_1 sur Q_2 et de Q_2 sur Q_1 dans les cas où:

1. $Q_1 > 0$ et $Q_2 > 0$.
2. $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$.
3. $Q_1 < 0$ et $Q_2 > 0$.
4. $Q_1 < 0$ et $Q_2 < 0$.

Si les deux charges ont le même signe, la force est répulsive (la force éloigne les charges), si les deux charges ont un signe opposé, la force est attractive (la force attire les charges l'une vers l'autre).

Question 9 *(Action-réaction)*

Est-ce que la loi de Coulomb est compatible avec la troisième loi de Newton (principe d'action-réaction)?

Réponse 9 *(Action-réaction)*

On constate que la loi de Coulomb est effectivement compatible avec la troisième loi de Newton (encore heureux!). En effet, l'amplitude de la force est la même quelque soit la charge (Q_1 ou Q_2) de l'objet que nous considérons, et les forces sont également opposées en direction étant donnée qu'elles sont répulsives ou attractives.

Remarque 3 *(Force de gravitation)*

On constate que la loi de Coulomb est très similaire à la loi de gravitation universelle pour deux masses m_1, m_2, séparée par une distance r

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{3.3}$$

où G est la constante de gravitation universelle. Une différence fondamentale est que la gravitation est une force uniquement attractive, alors que la force de Coulomb peut-être attractive ou répulsive.

L'unité de la charge électrique est le *Coulomb*, [C].

Question 10 *(Unités de k)*

Quelles sont les unités de la constante k?

Réponse 10 *(Unités de k)*

En SI la constante k a pour valeur

$$k = 8.988 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}, \tag{3.4}$$

où C est le *Coulomb*, l'unité de la charge électrique.

Pour avoir une idée de ce que représentent ces grandeurs, voyons quelle force exerceraient entre elles deux charges d'un Coulomb séparées d'un mètre:

$$F \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\cdot 1 \cdot 1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N}. \tag{3.5}$$

Cela correspond au poids d'un objet de presque 10^9 kg! On voit qu'un Coulomb est une charge gigantesque qu'on ne rencontre pas fréquemment dans la nature. Typiquement, les charges sont plutôt de l'ordre du μC (soit 10^{-6} Coulombs).

L'unité élémentaire de la charge, est la charge d'un proton ou d'électron, notée e: la *charge élémentaire*. Elle vaut

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}. \tag{3.6}$$

Ici e est positive et correspond donc à la charge d'un proton, alors que $-e$ est la charge de l'électron.

Question 11 *(Charge élémentaire)*

Quelle conséquence y a-t-il à avoir une charge élémentaire? Toutes les charges sont-elles possibles?

Réponse 11 *(Charge élémentaire)*

L'existence d'une charge élémentaire a comme conséquence que la charge est "quantisée": elle n'est exprimable qu'en multiples entiers de e (e, $2e$, $3e$, …). Il est ainsi impossible d'avoir une charge qui soit $12889283.512 \cdot e$. Pour des usages pratiques, on voit néanmoins que cette discrétisation n'a pas d'implication directes: il faut environ 10^{13} électrons pour faire 1μC. On a donc l'impression à

l'échelle humaine que la charge est une quantité *continue*. En revanche à des échelles nanoscopies (la taille des circuits des micro-processeurs par exemple) l'effet de la quantisation devient visible et même problématique (on a atteint la limite de réduction de la taille des circuits imprimés classiques à cause de *l'effet tunnel*).

L'équation de Coulomb s'applique à des charges **ponctuelles** ou au moins la taille ds objets chargés est beaucoup plus faible que les distances entre les objets. Cela permet de négliger la distribution des charges dans des objets qui pourrait être non-uniforme. Par ailleurs, cette équation est valable quand les charges sont stationnaires car d'autres forces entrent en jeu lorsque les charges sont en mouvement, mais cela dépasse le cadre de ce cours. Ici nous nous intéressons donc à **l'électrostatique** et donc l'équation de Coulomb donne la **force électrostatique**.

Exemple 14 *(force électrique sur un proton)*

Déterminer la valeur, direction et orientation de la force électrique entre un proton et un électron, de charges $Q_1 = -e$ et de charge $Q_2 = +e$ dans un atome d'hydrogène en supposant que l'électron et le proton sont à une distance de $r = 0.5 \cdot 10^{-10}$m.

Solution 14 *(force électrique sur un proton)*

La norme de la force se détermine aisément avec l'équation de Coulomb

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1.6^2 \cdot 10^{-38}}{0.5^2 \cdot 10^{-20}} \cong 9 \cdot 10^{-8} \text{ N}. \tag{3.7}$$

Cette force va dans la direction reliant le proton et l'électron, et est attractive car les forces sont opposées.

Exemple 15 *(Symétrie)*

Soient deux forces $Q_1 = 10\mu$C et $Q_2 = 100\mu$C séparées par une distance r. Quelle charge ressent la plus grande force?

Solution 15 *(Symétrie)*

La force ressentie par les deux forces est la même. En effet,

$$F_{12} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = k\frac{Q_2 Q_1}{r^2} = F_{21}. \tag{3.8}$$

La loi de Coulomb décrit l'intéraction entre deux charges. En présence de plusieurs charges, nous pouvons appliquer le *principe de superposition*, et comme nous l'avons fait pour la force de gravitation, et considérer les forces deux par deux comme des vecteurs. Ainsi, si nous avons un système de trois charges, Q_1, Q_2, et Q_3, la charge Q_1 ressent la somme de la force $Q_2 \to Q_1$ et $Q_3 \to Q_1$.

3.5 Deux exercices

Les exercices suivants sont très similaires à ce que nous avons fait avec les forces au chapitre précédent. L'unique différence, c'est que les forces sont obtenues avec la loi de Coulomb.

Exemple 16 *(Sur une ligne)*

Soient trois particules chargées, Q_1, Q_2, et Q_3 alignées de gauche à droite (voir fig. 3.2). Calculer la force exercée sur Q_3 (la particule la plus à droite) si les charges sont données par

$$Q_1 = -8\mu\text{C}, \quad Q_2 = 3\mu\text{C}, \quad Q_3 = -3\mu\text{C}, \tag{3.9}$$

et que les distances sont de

$$r_{12} = 0.3 \text{ m}, \quad r_{23} = 0.2 \text{ m}. \tag{3.10}$$

Ensuite calculer les forces agissant sur Q_1 et Q_2.

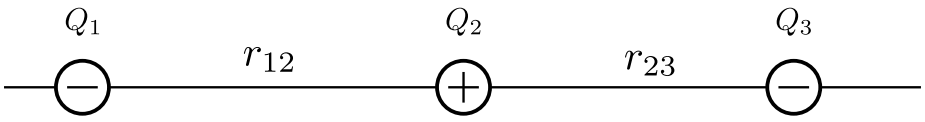

Figure 3.2: Illustration des charges alignées.

Solution 16 *(Sur une ligne)*

Par le principe de superposition, on a que la force résultante, $\vec{F}$ que ressent Q_3 est donnée par

$$\vec{F} = \vec{F}_{2\to3} + \vec{F}_{1\to3}. \tag{3.11}$$

La loi de Coulomb nous donne immédiatement $F_{2\to3}$ et $F_{1\to3}$

$$F_{2\to3} = k\frac{Q_2Q_3}{r_{23}^2} \cong 2.02\text{N}, \tag{3.12}$$

$$F_{1\to3} = k\frac{Q_1Q_3}{r_{13}^2} \cong 0.86\text{N}. \tag{3.13}$$

La charge Q_3 étant négative la force de Q_1 est répulsive, alors que celle de Q_2 est attractive. On a donc finalement

$$F = -F_{2\to3} + F_{1\to3} = -1.16\text{N}, \tag{3.14}$$

et la force pointe vers la gauche.

Les force sur Q_1 et Q_2 sont à faire pour vous comme des grand $\cdot$ e $\cdot$ s.

Cet exercice nous montre une propriété importante de la force électrique. La charge Q_2 ne masque pas du tout la charge Q_1. En effet, la force que Q_1 applique sur Q_3 est la même que si Q_2 n'était pas là.

Exemple 17 *(Avec des vrais vecteurs)*

Soient trois charges comme sur la fig. 3.3. Calculer la force électrostatique résultante sur Q_3 dûes aux charges Q_1 et Q_2.

Ajouter une charge $Q_4 = -50\mu$C de telle façon à ce que la force sur Q_3 soit nulle. Quelle doit être sa position?

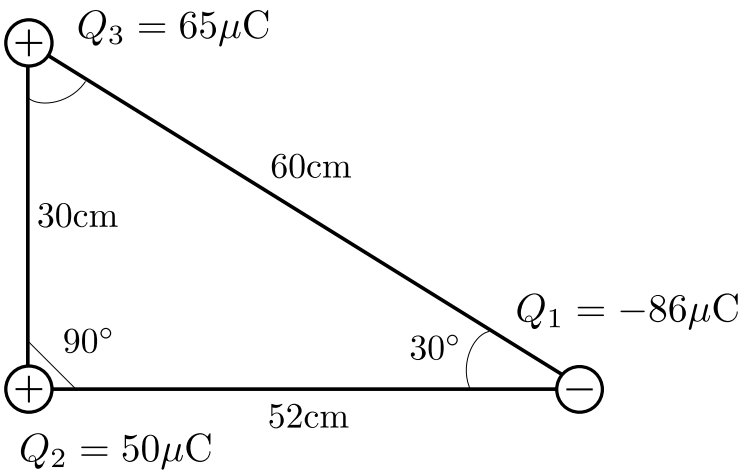

Figure 3.3: Le positionnement des charges.

Solution 17 *(Avec des vrais vecteurs)*

Cet exercice se résout de façon très similaire à l'exercice précédent, simplement que le problème est bi-dimensionnel. La force résultante sur Q_3 est donnée par

$$\vec{F} = \vec{F}_{2\to 3} + \vec{F}_{1\to 3}. \tag{3.15}$$

Les normes de $\vec{F}_{2\to 3}$ et $\vec{F}1 \to 3$ se calculent avec la loi de Coulomb

$$F_{2\to 3} = k\frac{Q_2 Q_3}{r_2 3^2} \cong 325\text{N}, \tag{3.16}$$

$$F_{1\to 3} = k\frac{Q_1 Q_3}{r_1 3^2} \cong 140\text{N}. \tag{3.17}$$

Avec vos talents de trigonométrie, on a ensuite que les vecteurs sont donnés par

$$\vec{F}_{1\to 3} = F_{1\to 3}\begin{pmatrix}\cos 30\\ -\sin 30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\ -70\end{pmatrix}\text{N}, \tag{3.18}$$

$$\vec{F}_{2\to 3} = F_{2\to 3}\begin{pmatrix}\cos 90\\ \sin 90\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 325\end{pmatrix}\text{N}. \tag{3.19}$$

Et on a finalement

$$\vec{F} = \begin{pmatrix}120+0\\ 325-70\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\ 255\end{pmatrix}\text{N}. \tag{3.20}$$

On peut en déduire la norme $||\vec{F}||$ à l'aide du théorème de Pythagore

$$||\vec{F}|| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cong 280\text{N}. \tag{3.21}$$

L'orientation, θ, de $\vec{F}$ se calcule également avec un peu de trigonométrie

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{255}{120} = 2.13 \Leftrightarrow \theta = 65^\circ. \tag{3.22}$$

Afin de déterminer l'endroit où il faut placer Q_4, il faut que la somme de $\vec{F}$ avec $\vec{F}_{4\to3}$ soit nulle. On doit donc avoir que la norme de ces deux forces doivent être égales et que leur direction doivent être opposées. Cela nous donne deux conditions

$$F = F_{4\to3}, \tag{3.23}$$
$$\theta_4 = 360 - \theta. \tag{3.24}$$

Nous connaissons déjà la direction de la force et donc dans quelle direction se trouvera Q_4 (la direction pointée par l'angle θ_4). La première condition nous permet finalement de calculer la distance entre Q_3 et Q_4, r_{34}

$$\begin{aligned} F = k\frac{Q_3Q_4}{r_{34}^2} &= \frac{9\cdot10^9\cdot50\cdot10^{-6}\cdot65\cdot10^{6-}}{r_{34}^2}, \\ r_{34}^2 = k\frac{Q_3Q_4}{r_{34}^2} &= \frac{29.2}{280}, \\ r_{34} &= 0.32\text{m}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Encore une fois on utilise le principe de superposition pour déterminer l'emplacement de la nouvelle charge comme si les charges Q_1 et Q_2 n'existaient pas.

Exercice 17 *(Flotter)*

Soient deux charges, Q et $-Q$ qui sont à une distance r l'une de l'autre. Pouvez-vous trouver l'endroit où on peut placer une charge Q entre les deux pour qu'elle ne ressente aucune force? Même question mais pour les deux charges initiales ayant une charge positive.

3.6 Le champs électrique

Les forces habituelles que nous exerçons ou subissons tous les jours sont souvent dites de "contact". Ainsi, lorsque notre main tiens un stylo, que nous donnons un coup de pied dans un ballon, … il y a un contact direct entre les objets. La force de gravitation et la force électrique ne fonctionnent pas comme cela, elles agissent *à distance* sans que des objets se touchent. Cette notion est un peu compliquée à appréhender. On la représente à l'aide d'un **champs**. Le champs

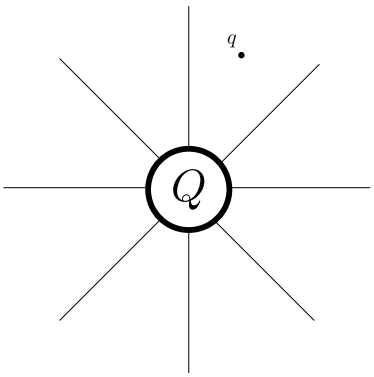

Figure 3.4: Schéma du champs électrique généré par une charge Q et mesuré à l'aide d'une charge négligeable q.

électrique s'exerce vers l'extérieur d'une charge, Q, dans toutes les directions et remplit tout l'espace (voir fig. 3.4).

Si une seconde charge, q, est placée quelque part proche de la charge initiale, elle va intéragir avec le champs électrique de celle-ci. Cette intéraction est la source de la force électrostatique exercée par Q sur q.

Le champs électrique d'une charge Q peut être mesuré à l'aide d'une charge test q. La charge test doit être suffisamment petite pour avoir un effet négligeable sur le champs électrique de Q. On peut donc ainsi en baladant q dans l'espace autour de Q, mesurer la force, $\vec{F}$, exercée par Q sur q. Le champs électrique $\vec{E}$ est ensuite défini comme la force exercée sur q divisée par q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{3.26}$$

De la loi de Coulomb, on peut donc déduire que le champs électrique autour d'une charge Q, mesurée à l'aide d'une charge q sera donné par

$$E = k\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{q} = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \tag{3.27}$$

On voit donc que E ne dépend que de Q et plus de q. Le champs électrique est une quantité ne dépendant que de la charge qui l'émet. Il décroît comme le carré de la distance entre la charge et le point de la mesure.

Si à présent on inverse le problème et qu'on nous donne un champs électrique $\vec{E}$, et qu'on aimerait connaître la force dûe à ce champs électrique sur une charge q quelconque. On aurait

$$\vec{F} = \vec{E}q. \tag{3.28}$$

Exemple 18 *(Photocopieuse)*

Une photocopieuse fonctionne en arrangeant des charges (suivant la forme de ce qu'on veut copier) sur la surface d'un rouleau et ensuite en disposant gentiment l'encre sèche, des particules chargées négativement (le toner), sur le rouleau pour

qu'elles s'y attachent. Ainsi, le toner s'attache en suivant la forme des particules chargées et est ensuite chauffé lorsqu'il se trouve au contact du papier pour y être transféré. En supposant que chaque particule de toner a un excès de 20 électrons et que leur masse est de $9 \cdot 10^{-16}$kg. Quelle doit être le champs électrique du rouleau pour que les particules restent attachées au rouleau, s'il faut au moins une force de deux fois leur poids pour qu'elles ne s'en détachent pas?

Solution 18 *(Photocopieuse)*

La charge de chaque particule de toner est de $q = 20e$. La force électrostatique qui s'applique sur chacune d'entre elles est de $F = qE$. De plus, on nous dit que pour que le toner ne se détache, la force électrostatique doit être au moins égale à deux fois le poids de chaque particule. Il vient donc

$$q \cdot E = 2 \cdot m \cdot g. \tag{3.29}$$

On résout pour E et on trouve

$$E = \frac{2mg}{q} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \cdot 9.8}{20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} = 5.5 \cdot 10^3 \text{N/C}. \tag{3.30}$$

Exercice 18 *(Charge ponctuelle)*

Calculer l'amplitude et la direction du champs électrique émis par une charge ponctuelle de charge $Q = -5 \cdot 10^{-6}$ C à un point P, se trouvant à 50cm à droite de la charge Q.

Le champs électrique en un point de l'espace émis par plusieurs charges sera la sommes des champs électriques émis par chacun des charges indépendamment des autres, en vertu du **principe de superposition**. Ce principe a été confirmé expérimentalement vérifié.

Exemple 19 *(Champs électrique entre deux charges)*

Deux charges ponctuelles, Q_1 et Q_2, sont séparées par une distance de 1m. Si $Q_1 = 200\mu$C et $Q_2 = -400\mu$C.

1. Déterminer la direction et l'amplitude du champs électrique à un point P entre les deux charges, avec P se trouvant à 30cm de Q_1 et 70cm de Q_2.
2. Si nous plaçons un électron au repos en P ($m = 9 \cdot 10^{-31}$kg). Quelle sera sont accélération au moment où il est libéré?

Solution 19 *(Champs électrique entre deux charges)*

1. Le champs électrique en P est rien d'autre que la somme des champs électriques de chaque charge prises individuellement. Si Q_1 est à gauche et Q_2 à droite, on a que E_1 pointe vers la droite et E_2 vers la droite

également. Avec la loi de Coulomb et le principe de superposition, on a

$$E = E_1 + E_2 = k\left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.3^2} + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0.7^2}\right) = 2.73 \cdot 10^7 \text{N/C}. \tag{3.31}$$

2. L'accélération de l'électron sera donnée par la deuxième loi de Newton:

$$F = m \cdot a, \tag{3.32}$$

avec $F = q \cdot E$. Il vient donc

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.73 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{-31}} = 4.85 \cdot 10^{18} m/s^2. \tag{3.33}$$

Exercice 19 *(Carré)*

Soient quatre charges de même amplitude mais de signe pouvant être différent et placées sur les 4 coins d'un carré. Quel arrangement va produire le champs électrique le plus élevé au centre du carré?

1. Les 4 charges positives?
2. Les 4 charges négatives?
3. Trois positives, une négative?
4. Trois négative une positive?
5. Deux positives, deux négatives?

Exercice 20 *(Avec des vrais vecteurs)*

Soient trois charges comme sur la fig. 3.3. Calculer le champs électrostatique à la position Q_3 dûes aux charges Q_1 et Q_2.

3.7 Les lignes de champs électrique

Le champs électrique est représenté par un vecteur, et on parle de *champs vectoriel* pour le représenter. Cela signifie qu'à chaque point de l'espace le champs électrique va associer un vecteur, qui aura l'amplitude et la direction du champs électrique en ce point (voir fig. 3.5). Dessiner de tels vecteurs peut être facilement fastidieux et peut lisible lorsque la quantité de vecteurs devient trop grande.

Pour visualiser un champs électrique, on utilise en général une série de lignes pour indiquer la direction du champs électrique (on s'intéresse plus à sont amplitude dans ce cas). On parle alors des **lignes de champs électrique** et sont dessinées pour indiquer la direction de la force dûe à des charges électriques sur une charge test *positive*. Cette convention implique que les lignes de champs sont **sortantes** pour une charge *positive* et *entrantes* pour une charge négative (voir fig. 3.6)

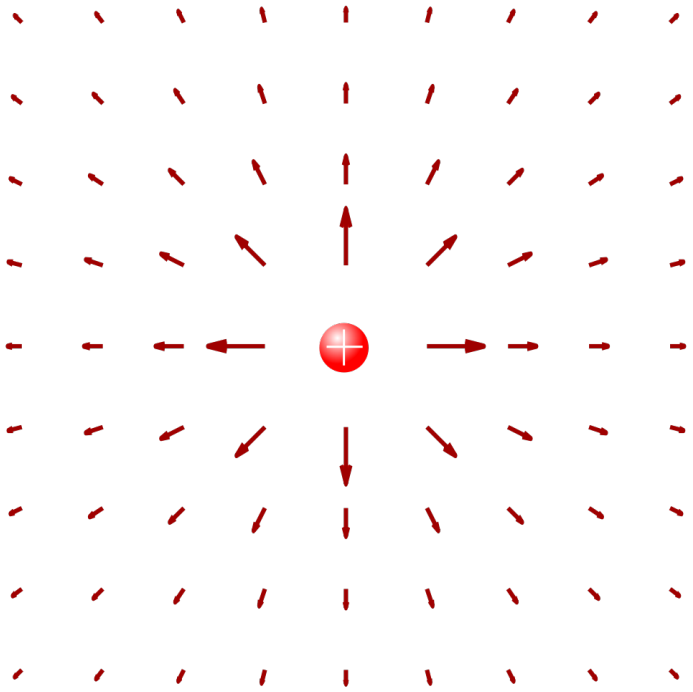

Figure 3.5: Champs de vecteurs représentant de champs électrique d'une charge positive. Source: Wikipédia, https://bit.ly/3bTIJDx.

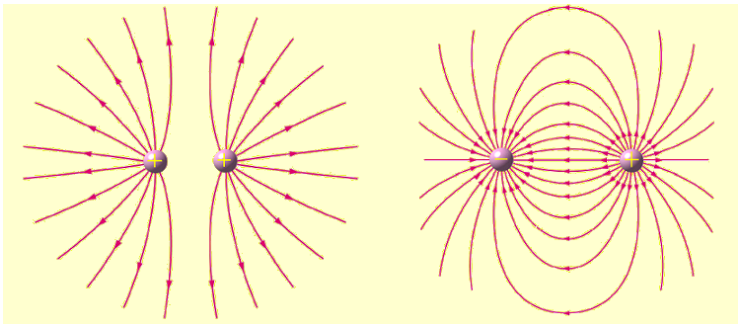

Figure 3.6: Lignes de champs électrique reliant en présence de deux charges positives (gauche) et une charge négative et une positive (droite). Les lignes de champs sont sortantes de la charge positive, et entrantes dans la charge négative. Source: Wikipédia, https://bit.ly/3dPsUk2.

Exercice 21 *(Charge seule)*

Dessiner les lignes de champs pour un charge positive seule et une charge négative seule.

On ne dessine qu'une quantité limitées de lignes de champs, bien qu'il en existe une infinité. La *densité* de lignes de champs est proportionnelle à l'intensité du champs électrique dans cette région de l'espace (plus elles sont denses plus le champs électrique est important). Cette propriété des lignes de champs électrique sera très utile plus tard il faut donc bien s'en souvenir.

Question 12 *(Champs électrique entre deux plaques de signes opposés)*

Soient deux plaque infinies, à quoi vont ressembler les lignes de champs électrique?

Réponse 12 *(Champs électrique entre deux plaques de signes opposés)*

Les lignes de champs sont parallèles entre elles, sortantes de la plaque positive et entrantes dans la plaque négative. Pour des raisons de symétrie, on peut assez facilement se convaincre que les lignes de champs sont perpendiculaires aux plaques. En effet, une charge test placées entre deux plaques infinies ressentirait une force symétrique de la part de chaque plaque et irait donc dans la direction perpendiculaire aux plaques.

Dans le cas où les plaques ne sont pas infinies, les lignes de champs s'incurvent au fur et à mesure qu'on s'approche des extrémités des plaques (voir fig. 3.7)

3.8 Le champs électrique dans des conducteurs

A présent, nous voulons discuter les propriétés des conducteurs à la lumière du concept des champs électriques.

Dans le cas statique, c'est à dire quand les charges sont au repos, le champs électrique dans un conducteur est **nul**. En effet, s'il existait un champs électrique dans le conducteur, les électrons libres se mettraient en mouvement (sous l'influence du champs électrique). Les électrons se positionneraient de telle façon que le champs devienne nul (et qu'ainsi ils ne bougent plus).

Cette propriété a un certain nombre de conséquences intéressantes.

1. Toute charge nette dans un conducteur se distribue à sa surface. Pour des charges négatives, on peut assez aisément imaginer que les électrons essaient de s'éloigner les plus possible les uns des autres, et se dirigeront vers la surface du conducteur (voir fig. 3.8).

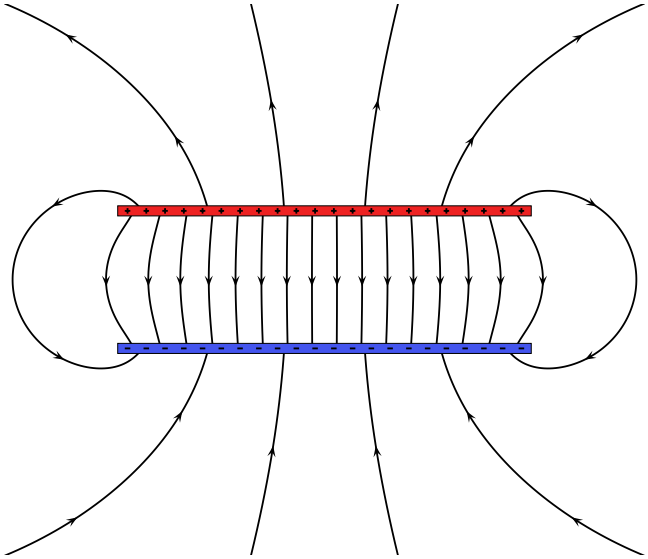

Figure 3.7: Lignes de champs dans le cas de deux plaques chargées de longueur finies et de signes opposés. On constante que les lignes de champs s'incurvent aux extrémités. Source: Wikipédia, https://bit.ly/3b2qIUx

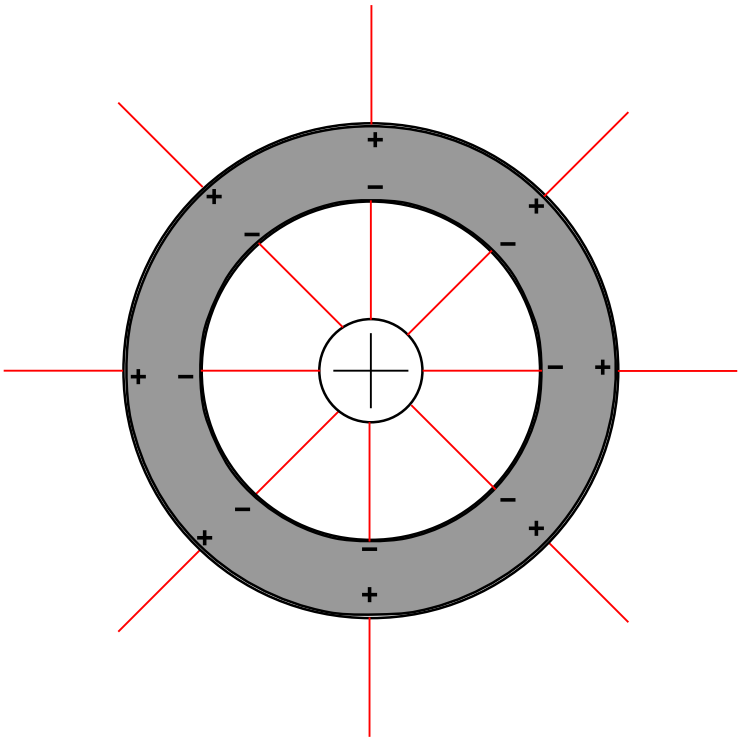

Figure 3.8: Le champs électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul. Les charges se déplacent pour se placer à la surface du conducteur et annulent exactement le champs électrique externe.

2. Si une charge $Q > 0$ est entourée par un anneau conducteur (la charge er le conducteur ne se touchent pas). Comme il ne peut y avoir de lignes de champs dans l'anneau, les charges négatives du se placeront sur la surface interne de l'anneau alors que les positives iront sur la face externe. Comme la charge nette du conducteur est nulle, la charge sur la surface interne du conducteur doit être de $-Q$ et sa surface externe doit être $+Q$. Ainsi, les lignes de champs électriques se "recréent" à l'extérieur du conducteur, bien qu'il n'en existe pas é l'intérieur (voir fig. 3.8).
3. Le champs électrique à l'extérieur d'un conducteur forme **toujours** un angle de 90° avec la surface. En effet, si l'angle n'était pas perpendiculaire, la composante parallèle du champs électrique déplacerait les charges le long de la surface (car une force s'appliquerait sur elles) jusqu'à ce qu'elles atteignent une position d'équilibre où elles ne bougent plus (où plus aucune force ne s'exercent sur elles). Et dans cette position le champs électrique est perpendiculaire.

Ces propriétés ne s'appliquent qu'aux conducteurs. Les isolants n'ayant pas d'électrons libres, ceux-ci ne peuvent pas se déplacer librement. Un champs électrique peut donc exister à l'intérieur d'un isolant. De plus le champs électrique à la surface d'un isolant peut ne pas être perpendiculaire.

Question 13 *(Cage de Faraday)*

Une boîte en métal est placée entre deux plaques parallèles chargées électriquement comme sur fig. 3.9.

Quel sera le champs électrique à l'intérieur de la boîte?

Réponse 13 *(Cage de Faraday)*

Il y a deux cas de figure:

1. La boîte est "pleine" (remplie de métal). Dans ce cas, que nous avons déjà discuté les électrons libres du métal se redistribuent dans le métal afin de faire en sorte que le champs électrique soit nul à l'intérieur.
2. La boîte en "vide" et c'est un peu plus complexe, mais le résultat est le même. Le champs externe ne sera pas modifié, car les électrons externes se redistribueront exactement de la même manière que pour la boîte pleine. Cela entraîne que le champs à l'intérieur sera également nul, car la distribution externe des électrons sera la même que dans le cas de la boîte pleine. On voit qu'une cage métallique est bon moyen d'isoler un volume d'un champs électromagnétique externe à la boîte (voir fig. 3.10). Ainsi, une voiture frappée par la foudre protégera ses occupants tout comme un avion ne sera en général que légèrement impacté s'il reçoit la foudre. Contrairement à être sous un arbre pendant un orage…

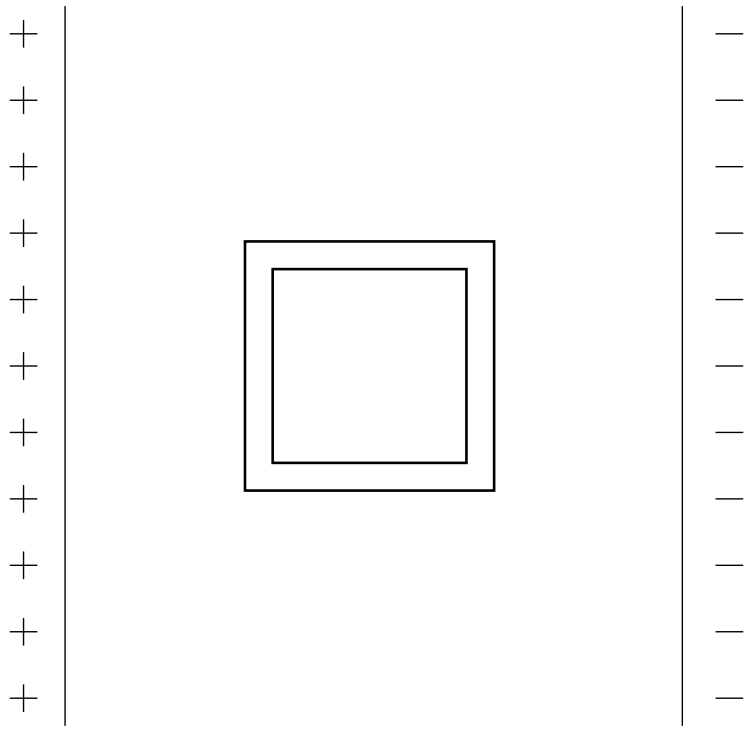

Figure 3.9: Deux plaques charges parallèles et une boîte entre les deux.

3.9 La loi de Gauss

La loi de Gauss (célèbre mathématicien et physicien de 18-19e siècle) fait intervenir le concept de **flux électrique**. Cette quantité est la quantité de champs électrique passant au travers d'une **surface**. L'équivalent pour un liquide serait le **débit** (la quantité de liquide passant au travers d'une surface). Pour un champs électrique *uniforme*, $\vec{E}$, passant au travers d'une surface S (voir fig. 3.11), comme sur fig. 3.11 le flux, Φ_E est donné par

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos(\theta), \tag{3.34}$$

ou θ est l'angle entre la normale de la surface et la direction du champs électrique.

Le flux électrique peut être vu de façon équivalent comme la projection de la surface sur la direction du champs électrique ou la projection du champs électrique sur le vecteur normal de la surface.

$$\Phi_E = E_\perp \cdot S = E \cdot S_\perp = E \cdot S \cos\theta, \tag{3.35}$$

où $S_\perp = S \cdot \theta$ est la projection de $\vec{S}$ sur la direction du champs électrique (la surface S multipliée par le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface) et $E_\perp$ la projection de $\vec{E}$ sur la direction normale à la surface S.

Comme nous l'avons discuté plus haut, le champs électrique se représente avec les lignes de champs. Plus le champs est intense, plus les lignes sont rapprochées.

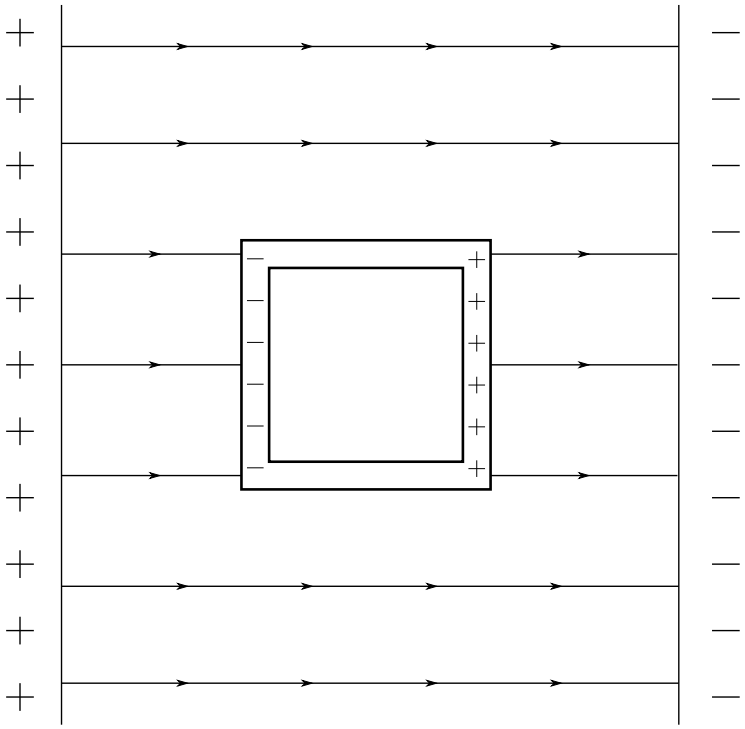

Figure 3.10: Le champs électrique à l'intérieur de la boîte est nul. En effet les charges se répartissent à la surface du conducteur pour y annuler le champs.

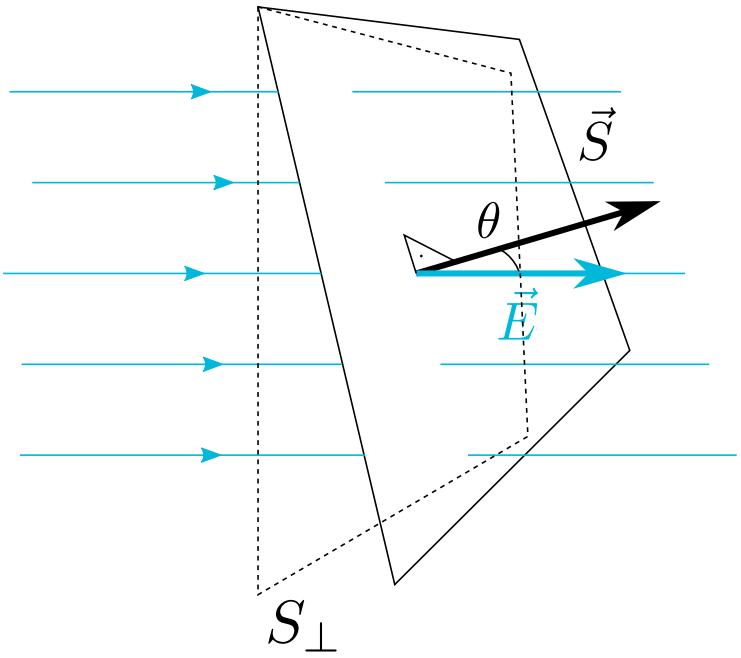

Figure 3.11: Le champs $\vec{E}$ passant au travers de la surface S.

Ainsi le nombre de le champs électrique E est proportionnel à la densité des lignes traversant $S_\perp$,

$$N \sim E \cdot S_\perp = \Phi_E. \tag{3.36}$$

Le théorème de Gauss implique le flux total de champs électrique sur une surface **fermée**. Prenons un cas simplifié pour commencer, où la surface fermée est un *cube*. On souhaite calculer le flux total passant u travers de la surface du cube (voir fig. 3.12) et le champs électrique est *uniforme*.

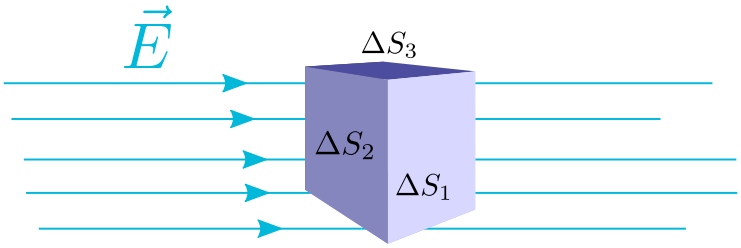

Figure 3.12: Le champs $\vec{E}$ passant au travers de la surface d'un cube. Chaque surface des facettes du cube est numérotée ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3, ..., ΔS_6.

Pour ce faire nous numérotons les facettes du cube ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_6 (voir fig. 3.12), et l'angle entre le champs électrique et chacune des normales des facettes correspondantes, θ_1, θ_2, ..., θ_6. Le flux total sera donné par

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Delta S_1 E\cos\theta_1 + \Delta S_2 E\cos\theta_2 + \Delta S_3 E\cos\theta_3 + \Delta S_4 E\cos\theta_4 + \Delta S_5 E\cos\theta_5 + \Delta S_6 E\cos\theta_6 \\ &= \sum_{i=1}^{6} E\Delta S_i \cos\theta_i. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Comme nous avons vu plus haut, le nombre de lignes de champs partant d'une charge positive et arrivant sur une charge négative sont proportionnelles à la charge. Ainsi le nombre **net** (la différence entre celle entrantes et celles sortantes) de lignes de champs pointant vers l'extérieur d'une surface fermée est proportionnel à la charge à l'intérieur de la surface, Q_{int}. La constante de proportionnalité est $1/\epsilon_0$. On a donc finalement

$$\sum_i E\Delta S_i \cos\theta_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \tag{3.38}$$

En l'occurrence, on a aucune charge à l'intérieur du cube et on peut voir assez facilement que dans le cas où E est homogène et aligné avec une face du cube, on a:

$$E\cos\pi + E\cos 0 + 4\cos\pi/2 = -E + E = 0. \tag{3.39}$$

En fait cette relation se généralise à n'importe quelle surface fermée. Si on numérote les N facettes d'une surface **fermée**, $\{\Delta S_i\}_{i=1}^N$, et l'angle entre la normale de la i-ème facette avec le champs E, $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ on peut écrire la **loi de Gauss**

$$\sum_i^N E\Delta S_i \cos\theta_i = \sum_i^N E_{i,\perp}\Delta S_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \tag{3.40}$$

où $E_{i,\perp}$ est la projection de $\vec{E}$ sur le vecteur perpendiculaire à la surface ΔS_i.

Exemple 20 *(Sphère chargée)*

Une surface conductrice sphérique de rayon R_0 et possédant une charge Q distribuée uniformément sur sa surface. Déterminer le champs électrique

1. À l'extérieur de la surface.
2. À l'intérieur de la surface.

Solution 20 *(Sphère chargée)*

Considérations philosophiques: comme la charge est distribuée de façon symétrique, le champs électrique doit également être symétrique. Ainsi la seul façon pour qu'il soit symétrique est qu'il soit en tout point perpendiculaire à la surface et ne dépendre que de R, la distance entre le centre de la sphère et le point de l'espace où on mesure le champs électrique.

On va utiliser la loi de Gauss pour résoudre cet exercice. Pour ce faire nous allons choisir deux surfaces différentes comme nous allons le voir ci-après.

1. On choisit une surface sphérique, S_1, avec $R > R_0$ et concentrique avec la sphère de départ. Par symétrie, le champs a la même amplitude sur toute la surface S_1, on a donc que $E_{i,\perp} = E$ pour n'importe quelle valeur de i. La loi de Gauss s'écrit donc

$$\sum_i^N E_{i,\perp} \Delta S_i = E \sum_i^N \Delta S_i = E(4\pi R^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \tag{3.41}$$

   où nous avons utilisé que $\sum_i \Delta S_i$ est la surface totale de la sphère de rayon R. Il ne nous reste qu'à résoudre cette équation pour E, et il vient

$$E = \frac{1}{4\pi epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = k \frac{Q}{R^2}. \tag{3.42}$$

   Ce qui est intéressant car c'est **exactement** le même résultat que pour une charge ponctuelle, de charge Q, qui se trouverait au centre de la sphère.
2. De façon similaire, on peut construire une surface S_2 sphérique, concentrique avec la sphère originale, avec $R < R_0$. On a donc

$$E \sum_i^N \Delta S_i = E(4\pi R^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0, \tag{3.43}$$

   car $Q_{\text{int}} = 0$ dans ce cas (toute la charge est sur la surface chargée). On a donc que le champs à l'intérieur de S_2 est nul, et donc le champs à l'intérieur d'une sphère chargée est nul.

Question 14 *(Et si on remplissait la sphère)*

Que se passerait-il si la sphère était pleine?

Réponse 14 *(Et si on remplissait la sphère)*

En fait ce résultat est valide pour n'importe quelle sphère pleine conductrice chargée. En effet, toutes les charges se repousseraient et se répartiraient uniformément sur sa surface. On se retrouverait dans la même situation que pour la sphère vide.

3.10 Résumé

On a vu plusieurs concepts importants dans ce chapitre.

- La **charge électrique** peut être négative ou positive et qui est toujours **conservée**.
- Les matériaux **isolants** et **conducteurs** qui respectivement conduisent ou pas l'électricité. Contrairement au isolants, les conducteurs possèdent des **électrons libres** qui peuvent se déplacer à l'intérieur d'un solide.
- La charge électrique est **quantisée**: il existe une charge élémentaire, e, qui est la charge du proton, $+e$, ou celle de l'électron $-e$.
- Les charges électriques exercent des **forces** les unes sur les autres. Elles sont attractives pour des charges de types différents et répulsives pour les charges de même type.
- La **loi de Coulomb** donne la relation entre la **force électrostatique**, la charge, et la distance entre deux object (respectivement, Q_1, Q_2, et r):

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \tag{3.44}$$

- Le **champs électrique** est une quantité existant dans l'espace autour des charges. Il peut être mesuré à l'aide d'une charge test q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{3.45}$$

- L'amplitude du champs électrique autour d'une charge est

$$E = k\frac{Q}{r^2}. \tag{3.46}$$

- Le champs électrique total autour de plusieurs charges est la somme de toutes les champs électriques. Cela est dû au **principe de superposition**.
- Le **flux** du champs électrique est donné par la quantité donnée par le produit entre la projection du champs électrique sur la normale de la surface, $E_\perp$, multipliée par la surface, ΔS

$$\Phi_E = E_\perp \cdot \Delta S. \tag{3.47}$$

- La **loi de Gauss** nous dit que le flux total au travers d'une **surface fermée** est proportionnel à la charge se trouvant à l'intérieur de la surface.

Chapitre 4

Le potentiel électrique

Tout comme pour le mouvement le concept *d'énergie* est très important pour l'électricité. Il permet d'étendre le concept de **conservation de l'énergie** à d'autres domaines qu'à la cinématique ou la dynamique.

4.1 L'énergie potentielle électrique

Comme dans le cas de l'énergie mécanique, on va définir l'énergie potentielle électrique comme on le ferait pour une force conservative. Le travail d'une force conservative entre deux points ne dépend pas du chemin parcouru mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée. Dans le cas de l'énergie potentielle dûe à la force de gravité, on a que $E = m \cdot g \cdot h$ (avec m la masse, h la hauteur et g l'accélération gravitationnelle). On sait grâce à la loi de Coulomb que la force entre deux charges est donnée par

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Comme pour l'énergie mécanique, on définit l'énergie potentielle d'un objet chargé qui se déplace entre 2 points, A et B (voir fig. 4.1) comme

$$\Delta_{EP}(A, B) = -W_{A\to B}, \tag{4.1}$$

où $\Delta_{EP}(A, B)$ est la variation d'énergie potentielle entre les points A et B, et $W(A \to B)$ le travail du à la force électrostatique. Ici, le travail $W(A \to B) > 0$ et donc la charge va perdre de l'énergie potentielle.

La variation d'énergie potentielle s'écrit donc

$$\Delta_{EP}(A \to B) = E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A). \tag{4.2}$$

Quand une charge q bouge d'un point A à un point B son énergie augmente (ou diminue) comme l'inverse du travail qu'il faut à la force électrostatique pour la déplacer de A à B.

Ainsi Dans le cas de fig. 4.1, nous sommes dans une situation où on a un champs électrique uniforme E entre deux plaques infinies. Si on lâche la charge q du

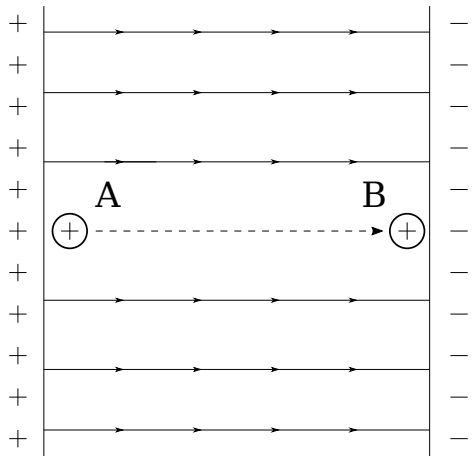

Figure 4.1: Le transport d'une charge positive entre A et B entre deux plaques chargées infinies.

point A, et qu'on suppose que q est suffisamment petite pour ne pas modifier le champs électrique entre les plaques. La force électrostatique va déplacer la charge du point A au point B sur une distance $d = |A - B|$ et effectuer un travail W

$$W_{A\to B} = F \cdot d = q \cdot E \cdot d. \tag{4.3}$$

Le changement d'énergie potentielle est donc

$$E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A) = -q \cdot E \cdot d. \tag{4.4}$$

L'énergie potentielle diminue dans ce cas (le travail est positif) et la particule accélère naturellement du point A au point B. Ainsi la loi de conservation d'énergie est vérifiée: l'énergie cinétique augmente et l'énergie potentielle (électrique) diminue d'autant. A l'inverse si on remplace la charge q par $-q$ son énergie potentielle sera augmentée lors du déplacement de A à B.

Question 15 *(Unités)*

Quelles sont les unités de l'énergie potentielle électrique?

Réponse 15 *(Unités)*

Comme pour toute énergie, les unités sont des joules, $[J]$, soit des

$$[J] = [\text{N} \cdot \text{m}] = \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]. \tag{4.5}$$

Il est important de noter que la valeur de l'énergie potentielle est relative à une valeur de référence. En effet, comme on le voit à l'éq. 4.4, on ne définit que la

différence d'énergie potentielle et pas une valeur absolue. En général, on choisit la "valeur de référence" de l'énergie potentielle électrique comme une valeur où l'énergie potentielle est choisie de façon arbitraire comme étant nulle. Ceci n'est pas particulièrement choquant. En effet, c'est une pratique courante avec l'énergie potentielle (on définit le zéro de l'énergie potentielle de gravitation à une "hauteur" zéro mais par rapport à quelle échelle de mesure?).

4.2 Le potentiel électrique

Au chapitre précédent, nous avons défini le champs électrique comme la force par unité de charge générée par une source.o Ici, nous allons recommencer en définissant le **potentiel électrique**, noté V, comme le champs électrique par unité de charge. Ainsi si une charge, q, se trouve dans un champs électrique à une position A, et a une énergie potentielle électrique $E_{\text{pot}}(A)$, son **potentiel électrique** est défini par

$$V(A) = \frac{E_{\text{pot}}(A)}{q}. \tag{4.6}$$

Question 16 *(Unités)*

Quelles sont les unités dui potentiel électrique?

Réponse 16 *(Unités)*

Les unités du potentiel électrique sont les **volts**, $[V]$. Ils peuvent s'exprimer en fonction des autres unités connues comme

$$[V] = \left[\frac{\text{J}}{\text{C}}\right] = \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{C}}\right] = \left[\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{C}}\right]. \tag{4.7}$$

Comme nous l'avons mentionné plus haut seule une **différence** d'énergie potentielle électrique est mesurable (il nous faut une valeur de référence). De même seule une **différence** de potentiel électrique peut se mesurer

$$V(B,A) = V(B) - V(A) = \Delta_{EP}(A \to B) = \frac{E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A)}{q} = -\frac{W_{A\to B}}{q}, \tag{4.8}$$

où A et B sont deux points et $W_{B\to A}$ le travail pour emmener une charge q du point B au point A. Tout comme le champs électrique ne dépend pas de la valeur de la *charge test*, ici le potentiel ne dépend pas de la charge test, q, non plus. Le potentiel électrique, V, ne dépend des charges qui créent le champs électrique associé. On dit que q acquière l'énergie potentielle électrique en se trouvant dans le potentiel V qui est créé par d'autres charges.

Pour reprendre l'exemple des plaques chargées de la fig. 4.1, on voit que la charge positive q a un potentiel électrique plus grand en A qu'en B et que donc elle va naturellement se déplacer vers B.

Remarque 4 *(Référénce)*

Afin de définir le potentiel électrique en un point A, nous avons besoin d'une valeur de référence comme discuté plus haut. En général cette valeur est choisie arbitrairement comme valant zéro et est le potentiel de la "terre". Tous les autres potentiels sont donnés par rapport à cette référence.

Question 17 *(Charge négative)*

Reprenons un exemple similaire à fig. 4.1, mais remplaçons la charge par une charge négative (voir fig. 4.2). Aussi elle se trouve au point B et est libre de se déplacer. Que va-t-il se produire? Son énergie potentielle va augmenter ou diminuer? Comment le potentiel électrique varie entre les deux points A et B?

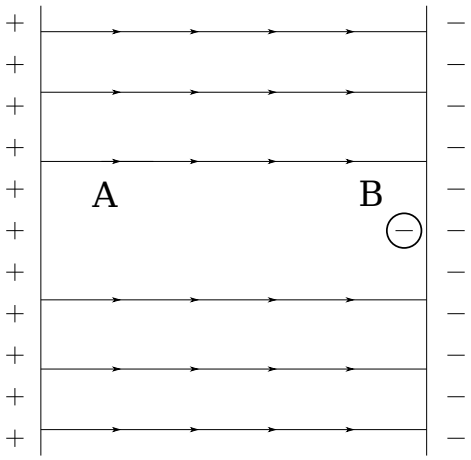

Figure 4.2: Le transport d'une charge négative entre B et A entre deux plaques chargées infinies.

Réponse 17 *(Charge négative)*

Une charge négative va être repoussée par la plaque négative et attirée par la charge positive. Ainsi, q va se déplacer vers la plaque positive, son énergie cinétique va augmenter. A cause du principe de la conservation de l'énergie, son énergie potentielle va donc décroître. On a que

$$E_{\text{pot}}(A) < E_{\text{pot}}(B). \tag{4.9}$$

En revanche la charge se déplace d'une d'une région avec un potentiel élevé vers un potentiel plus faible. La variation de potentiel électrique (qui est dûe aux

plaques) est donc positive contrairement à l'énergie potentielle électrique

$$E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A) > 0, \tag{4.10}$$
$$V(B) - V(A) > 0. \tag{4.11}$$

Si la charge q était positive, la variation d'énergie potentielle aurait été négative.

Si on fait faire le chemin inverse à notre charge positive q, et qu'on la déplace de B à A. On peut inverser la relation entre le potentiel électrique et la variation d'énergie potentielle entre les points B et A pour une charge q. On aura donc

$$\Delta_{EP}(B \to A) = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B) = q \cdot V(A, B). \tag{4.12}$$

Si la différence de potentiel est de 10V, l'énergie potentielle d'une charge de 5C sera augmentée de 50J. Une charge de 10C, elle, verra son énergie potentielle électrique augmenter de 100J pour le même déplacement.

C'est très similaire avec ce qui se passe pour le cas de l'énergie potentielle de gravitation. Prenons deux personnes de $m_1 = 50$kg et $m_2 = 100$kg qui monte en haut d'un immeuble de $h = 20$m. Le potentiel dû à la gravitation est le même pour les deux en haut de l'immeuble, $g \cdot h = 186$J. En revanche l'énergie potentielle de gravitation des deux objets sera différente. Elle sera de $m_1 \cdot g \cdot h \cong 980$J pour le premier objet et de $m_2 \cdot g \cdot h \cong 1860$J pour le second. Évidemment la comparaison n'est pas parfaite, car la charge est de deux types différents, $+$ et $-$, alors qu'il n'y a pas d'équivalent pour la masse.

Exemple 21 *(Électrons dans un tube)*

Supposons qu'un électron au repos est accéléré via une différence de potentiel $V(B, A) = V(B) - V(A) = 5000$V entre deux plaques chargées. $V(B)$ correspond à la plaque chargée positivement, et $V(A)$ à celle chargée négativement. L'électron se trouve en B au départ et a une vitesse nulle.

1. Quelle sera la variation d'énergie potentielle électrique de l'électron en fonction de sa charge et du potentiel?
2. Quelle sera son énergie cinétique en fonction de la charge et du potentiel?
3. Quelle sera sa vitesse en A?

La masse et la charge de l'électron sont données par

$$m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad q = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \tag{4.13}$$

Solution 21 *(Électrons dans un tube)*

1. La charge d'un électron est de $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C. Son énergie potentielle électrique est donc donnée par

$$E_{\text{pot}} = q \cdot V(B, A) = -1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5000 = -8 \cdot 10^{-16}\text{J}. \tag{4.14}$$

L'électron perd donc de l'énergie potentielle en se rapporchant de la plaque A, car il est naturellement attiré vers cette plaque. Tout comme une masse perd de l'énergie potentielle de gravitation quand elle se rapproche de la terre.

2. L'énergie potentielle électrique est transformée en énergie cinétique quand la charge atteint la plaque A. On a donc que

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -q \cdot V(A, B). \tag{4.15}$$

On a donc que

$$E_{\text{cin}} = 8 \cdot 10^{-16}\text{J}. \tag{4.16}$$

3. Finalement il nous résoudre l'équation ci-dessus pour v

$$v = \sqrt{\frac{-2qV(A, B)}{m}} = 4.2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{s}. \tag{4.17}$$

Exercice 22 *(Et avec un proton?)*

Résoudre le même exercice que ci-dessus, mais en remplaçant l'électron par un proton et la différence de potentielle par -5000 V. La masse d'un proton est de $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Afin de se donner une idée de ce que représentent les volts, vous trouverez dans le tbl. 4.1

Table 4.1: Différents potentiels et le voltage par rapport à la terre.

Source	Voltage
Éclair	10^8 V
Ligne haute tension	10^{5-6} V
Démarreur voiture	10^4 V
Prise électrique	200 V
Batterie (AA, AAA)	1.5 V
ECG / EEG	10^{-4} V

4.3 Lien entre potentiel électrique et champs électrique

Au chapitre précédent, on a décrit un système chargé à l'aide du camps électrique. Dans ce chapitre, nous avons fait une description à l'aide du potentiel électrique. Comme la physique sous-jacente reste identique, cela signifie qu'il doit y avoir un lien entre les deux. Dans cette section nous allons voir comment relier l'un à l'autre dans un cas simplifié, bien qu'on puisse généraliser cela à n'importe quelle situation.

Considérons le cas simple de deux plaques chargées parallèles et infinies (comme sur la fig. 4.1). La différence de potentiel entre ses plaques est de $V(B,A) = V(B) - V(A)$, avec la plaque B qui est de charge positive et la plaque A de charge négative. On va chercher à déterminer quel est le champs électrique entre ces deux plaques à partir de la différence de potentiel $V(A,B)$. Pour ce faire on va utiliser une charge $q > 0$ et s'intéresser au travail qu'il faut fournir pour déplacer la charge de la plaque A à la plaque B. La charge étant positive, elle sera attirée par A et repoussée par B, il faudra donc une force externe pour lui faire effectuer ce trajet. Comme on l'a vu au chapitre précédent, le travail est le produit de la charge avec la différence de potentiel

$$W = -q \cdot (V(B) - V(A)) = -q \cdot V(B,A). \tag{4.18}$$

Nous savons aussi que le travail est le produit de la force avec la distance parcourue, d (ici la distance entre A et B), ainsi

$$W = F \cdot d. \tag{4.19}$$

Finalement, la force et le champs électrique sont reliée par (voir le chapitre précédent)

$$F = q \cdot E \Rightarrow W = q \cdot E \cdot d. \tag{4.20}$$

En utilisant l'éq. 4.18, on trouve que

$$\begin{aligned} -q \cdot V(B,A) &= q \cdot E \cdot d, \\ V(B,A) &= -E \cdot d, \\ E &= -\frac{V(B,A)}{d}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Le signe $-$ dans cette relation indique que la *direction* du champs électrique est opposée à la direction dans laquelle le potentiel diminue. On voit aussi de cette équation que les unités du champs électrique peuvent également s'exprimer comme des

$$[E] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right], \tag{4.22}$$

Remarque 5 *(Plusieurs dimensions)*

Ici nous avons une grande simplification qui a été faite. En effet, nous considérons un système unidimensionnel où le champs électrique est uniforme. En général le champs électrique est une quantité vectorielle et qui varie dans l'espace et donc le lien entre $\vec{E}$ et V est plus compliqué. Néanmoins, cela est laissé pour un cours plus avancé, car les concepts mathématiques nécessaires dépassent les connaissances que vous avez acquises jusqu'ici.

Exemple 22 *(Le champs électrique et le voltage)*

Deux plaques parallèles sont chargées pour produire une différence de potentiel de 50 V. Si l'écarte entre les plaques est de 5 mm, calculer l'amplitude du champs électrique entre les plaques.

Solution 22 *(Le champs électrique et le voltage)*

On applique simplement l'équation

$$E = \frac{V(B,A)}{d} = \frac{50}{0.005} = 10000 \ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Plus généralement, dans une région où E ne serait pas uniforme, on peut montrer que le champs électrique est proportionnel au taux de variation spatial du potentiel électrique et a la direction opposée

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x}, \tag{4.23}$$

où ΔV est la variation du potentiel sur une petite distance Δx.

Exercice 23 *(Potentiel électrique dû à une charge ponctuelle)*

Soit une charge ponctuelle Q. A partir de la formule du champ électrique et de ce que nous venons de voir. Déterminer le potentiel électrostatique engendré par une charge ponctuelle à une distance r de la charge.

4.4 La capacité électrique

Un **condensateur** est un objet qui est constitué de deux conducteurs (souvent des plaques ou des feuilles) qui sont placées l'une proche de l'autre mais qui ne se touchent pas. Les condensateurs se trouvent dans un grand nombre de circuits électroniques. Ils servent à stocker des charges électriques qui peuvent être utilisées à un moment ultérieur. Ils permettent aussi d'empêcher les variations trop rapides de puissance électrique et ainsi protègent les circuits. On a pu aussi les utiliser pour la mémoire des ordinateurs dans des versions miniaturisées.

Les capacités sont représentées dans des circuits électriques pas un symbole comme si la fig. 4.3

Si on applique un voltage (un potentiel), V, entre les deux plaques en les connectant à une batterie ou à une prise électrique par exemple, une des deux plaques va être chargée négativement tandis que l'autre sera chargée positivement avec des charges respectivement $-Q$ et Q. La charge du condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel au bords du condensateur, ici c'est V, le potentiel de la batterie ou de la prise. On a que

$$Q = C \cdot V, \tag{4.24}$$

où C est la capacité du condensateur et qui a des unités de Coulombs par Volts, appelés *farad*, [F]. Les capacités standards se situent entre $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$ et $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$.

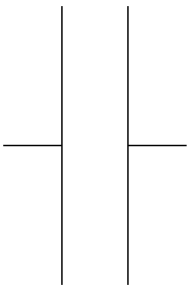

Figure 4.3: Un symbole représentant une capacité dans un circuit électrique.

Ici, nous voyons facilement qu'on pourrait aisément confondre la capacité C, avec les unités C, (les Coulombs) et le voltage V avec les volts. C'est un peu malheureux, mais il faudra être un peu vigilant pour éviter les erreurs malencontreuses.

La capacité, C, ne dépend en général ni du voltage, ni de la charge du condensateur. Elle ne dépend que de la forme et de la surface des plaques ainsi que de la distance entre elles et le matériau qui les sépare. Ainsi pour des plaques parallèles de surface S et séparées par une distance d, on a

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}, \tag{4.25}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide qu'on a déjà vu plus tôt dans ce condensateurs

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}. \tag{4.26}$$

Exemple 23 *(Application de formules)*

1. Calculer la capacité d'un condensateur dont les plaques rectangulaire ont des dimensions de 10cm $\times$ 5cm et sont séparées d'une distance de 1mm.
2. Quelle est la charge des plaques si on connecte la capacité à une batterie de 12V?
3. Quelle est le champs électrique entre les plaques?
4. Quelle devrait être la distance entre les plaques pour avoir une capacité de 1F?

Solution 23 *(Application de formules)*

1. La surface du condensateur est de $S = 0.1 \cdot 0.05 = 5 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2$. On peut en déduire la capacité via

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 44.3\mathrm{pF}. \tag{4.27}$$

2. La charge des plaque est donnée par

$$Q = C \cdot V = 44.3 \cdot 10^{-12} \cdot 12 = 5.31 \cdot 10^{-10}\mathrm{C}. \tag{4.28}$$

3. Le champs électrique uniforme généré par les plaques est donné par

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12}{10^{-3}} = 1.2 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{4.29}$$

4. En réutilisant la même équation que pour la question (1), on peut écrire

$$d = \epsilon_0 \frac{S}{C} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1} = 8.85 \cdot 10^{-15}\mathrm{m}. \tag{4.30}$$

On voit donc qu'une capacité de 1F est une quantité assez monstrueuse qu'il n'est pas possible de produire avec une aussi petite surface. En gardant une distance de 1mm, on pourrait avoir une capacité de 1F en augmentant la surface à

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{10^{-3}}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 1.13 \cdot 10^8 \mathrm{m}^2, \tag{4.31}$$

soit un carré de 10km de côté…

Il existe une grande quantité d'applications pour les condensateurs: ils peuvent servir de remplacement pour les batteries, sont à la base du fonctionnement des microphones ou des touches de certains claviers.

Illustration 1 *(Touche de clavier)*

Une touche de clavier, dans certains cas, peut être attachée à une plaque de condensateur mobile, alors que la seconde est fixe. Entre les plaques est situé un isolant qui a des propriétés élastiques. Lorsque la touche est pressée, l'isolant se comprime et la distance entre les plaques du condensateurs change. Cela modifie le champs électrique entre les plaques du condensateur qui peut ensuite être détecté par un circuit électrique.

La charge d'un condensateur est reliée à la tension maximale qui peut être appliquée entre ses plaques, sans que la charge puisse traverser et former un arc électrique (comme cela se produit lorsque la charge passe des nuages à la terre lors d'un orage). Ce phénomène s'appelle claquage électrique. Cette tension dépend du matériau séparant les deux plaques.

Jusqu'ici, nous avons supposé qu'il y a de l'air (ou du vide) entre les plaques d'un condensateur. En général, on insère un isolant, comme du plastique, entre les plaques. Cet isolant est appelé un *diélectrique*.

Le diélectrique a plusieurs propriétés intéressantes:

1. Le diélectrique est en général plus isolant que l'air, car il empêche les charges de se déplacer aussi librement. Ainsi, il est possible d'accumuler un plus grand voltage entre les plaques.
2. De même, les plaques du condensateurs peuvent être plus rapprochées sans que les charges passent d'une plaque à l'autre. En rendant d plus faible on augmente la capacité.

3. On s'est rendu compte expérimentalement que la capacité d'un condensateur est augmentée proportionnellement par un facteur K, la *constante diélectrique*, ne dépendant que du diélectrique. On a donc que

$$C = K\epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}, \tag{4.32}$$

avec $\epsilon = K\epsilon_0$ la permittivité du diélectrique. Pour l'air ou le vide on a que $K = 1$. Comme on l'a très brièvement discuté plus haut, il y a une valeur maximale du champs électrique qui s'applique entre les plaques d'un condensateur. Au delà, les charges peuvent passer entre les plaques. Cette valeur limite du champs est appelée *rigidité diélectrique* et peut varier grandement. Pour l'air elle est de $3 \cdot 10^6$V/m, alors que pour du plastique elle est de l'ordre de $50 \cdot 10^6$V/m pour $K \cong 4$.

Question 18 *(Insertion de diélectrique à V constant)*

Soit un condensateur composé de deux plaques séparées d'une distance d et connecté à une batterie de voltage constant V qui acquière une charge Q. Si on insère un diélectrique avec $K > 1$ entre les plaques, est-ce que Q va augmenter, diminuer, ou rester le même?

Réponse 18 *(Insertion de diélectrique à V constant)*

Le voltage V reste constant, alors que C augmente à cause de la relation $C = K\epsilon_0 S/d$. On déduit donc de la relation $Q = CV$ que Q doit augmenter pour $K > 1$. Ainsi, quand on insère un diélectrique dans un condensateur plus de charges seront retirées de la batterie pour être amenées sur les plaques du condensateur.

Question 19 *(Insertion de diélectrique dans un condensateur isolé)*

Soit un condensateur composé de deux plaques séparée par de l'air, chargé à une charge Q et déconnecté de la batterie. On insère ensuite un diélectrique avec $K > 1$. Est-ce que Q, V, ou C vont changer?

Réponse 19 *(Insertion de diélectrique dans un condensateur isolé)*

La charge Q reste la même comme le condensateur est isolé du reste du monde. La capacité elle augmente à cause de la permittivité augmentée. Ainsi la tension entre les plaque diminue à cause de $V = Q/C$.

4.4.1 Description moléculaire des diélectriques

D'un point de vue phénoménologique, il est intéressant de comprendre pourquoi la présence d'un diélectrique augment la capacité d'un condensateur. Un condensateur dont les plaques sont séparées par de l'air aura une capacité C_0 et s'il est soumis à une tension V_0 aura une charge Q. Si nous insérons un diélectrique entre les plaques, à cause du champs électrique entre les plaques, les charges à l'intérieur du diélectrique vont se déplacer légèrement (les électrons vont s'approcher de la charge positive et laissant les protons plus proches de la charge négative). Cela va créer une petite charge nette négative du côté de la plaque positive et une petite charge positive du côté de la plaque négative. Cela aura pour effet "d'annuler" certaines lignes de champs à l'intérieur du diélectrique (mais pas toutes) et ainsi le voltage est également réduit (pour une charge constante).

4.5 Résumé

Dans ce chapitre nous avons vu les concepts suivants:

- Le potentiel électrique est l'énergie potentielle électrique par unité de charge.
- La différence de potentiel électrique entre deux points est défini par le travail nécessaire pour déplacer une charge de 1C entre ces deux points et est mesurée en volts, V = J/V.
- La différence de potentiel entre deux points, A, B, dans un champs électrique uniforme E est donnée par

$$V = -E \cdot d, \tag{4.33}$$

  avec d la distance entre A et B.
- Une charge Q engendre un potentiel électrique

$$V = k\frac{Q}{r}. \tag{4.34}$$

- Un condensateur est un système composé de deux conducteurs séparé par un isolant.
- La capacité, C, d'un condensateur se définit en fonction de sa charge et du potentiel entre les deux conducteurs

$$C = Q/V. \tag{4.35}$$

- Elle peut également se définir par des considérations géométriques et des propriétés intrinsèques de l'isolant

$$C = \epsilon\frac{S}{d}, \tag{4.36}$$

  avec $\epsilon = K\epsilon_0$ la permittivité de l'isolant, d la distance entre les conducteurs, et S leurs surface.

Chapitre 5

Le courant électrique

Dans les précédents chapitres, nous avons étudié les charges *statiques* (au repos). Ici, nous allons nous intéresser aux au mouvement des charges, plus communément appelés courants électriques.

Les courants électriques sont omniprésents dans notre vie quotidienne: ils servent à allumer les ampoules, faire fonctionner les ordinateurs (et plus globalement les engins électriques), etc. Les courants électriques se produisent en général à l'intérieur de fils conducteurs. Afin de déplacer ces charges, il est également nécessaire qu'elles soient soumises à un champs électrique. Hors dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'à l'intérieur d'un conducteur le champs électrique *est nul*. Cela pourrait sembler paradoxal, mais dans le cas des courants électriques, les charges sont *en mouvement* (contrairement à ce qui se passait dans le chapitre précédent où on étudiait ce qui se passait dans le cas *statique*). Ainsi quand les charges bougent, un champs électrique est présent à l'intérieur du conducteur, et il est même nécessaire pour faire bouger les charges. Afin de contrôler ce champs électrique, nous pouvons donc utiliser le champs électrique ou le potentiel électrique (aussi appelé voltage dans la vie quotidienne). La différence de potentielle nécessaire peut être produite à l'aide d'une batterie par exemple (ou une centrale nucléaire).

5.1 La batterie électrique et son fonctionnement en 5min

Inspiré par des travaux sur les muscles des pattes de grenouilles qui se contractaient quand on on les touchait avec des métaux différents, M. Volta inventa la batterie (en 1800). La batterie produit un *courant électrique* en transformant de l'énergie *chimique* en énergie *électrique*. Nous décrivons ici une batterie simplifiée, pour illustrer leur fonctionnement général. Deux *électrodes* (des tiges ou des plaques métalliques) sont plongées dans une solution appelée *électrolyte* (voir fig. 5.1). Ce système s'appelle une *cellule électrique* et en connectant plusieurs cellules on obtient une batterie (en fait une cellule suffit de nos jours).

L'électrolyte dissout l'électrode négative (-), ses constituants en se dissolvant

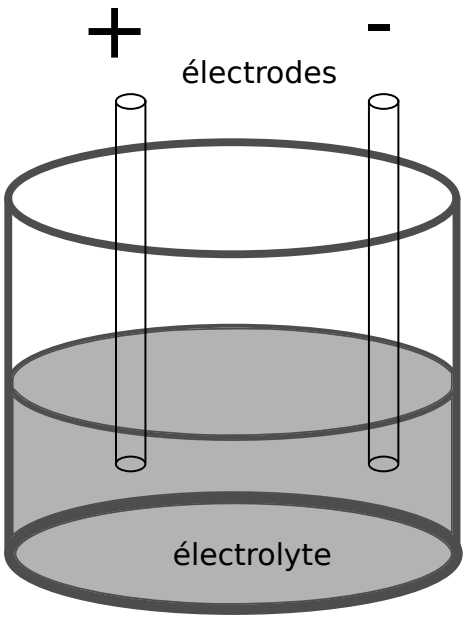

Figure 5.1: Schéma d'une batterie. Deux électrodes, une positive et l'autre négative sont plongées dans un électrolyte.

"abandonnent" des électrons et forment des *ions* (atomes chargés) positivement. Ainsi, l'électrolyte se charge positivement ce qui a pour effet d'arracher des atomes sur l'électrode positive (+). Il y a donc une différence de charge entre les deux électrode et on crée ainsi une différence de potentiel entre les 2 électrodes. Comme vu dans le chapitre précédent on peut utiliser cette différence de potentiel pour mettre les charges en mouvement.

La fig. 5.2 représente la notation pour la source de tension (batterie ou toute autre source)

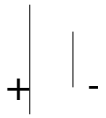

Figure 5.2: Le symbole pour la source de tension.

5.2 Le courant électrique

En connectant les deux électrode avec une fil conducteur, on construit un circuit électrique. Ce circuit peut contenir tout un tas d'autres choses comme par exemple une ampoule (led parce qu'elles consomment moins). Dans le circuit les charges peuvent se déplacer librement, et donnent ainsi lieu à un *courant électrique*. Le courant électrique, I, est définit comme la variation de charge (ΔQ)

pendant un certain laps de temps (Δt) donné

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{5.1}$$

Les unités de I sont les *ampères*, notées, [A]

Question 20 *(Conversion d'unités)*

Comment exprime-t-on les unités du courant en fonction d'autres unités vues précédemment dans ce cours?

Réponse 20 *(Conversion d'unités)*

Le courant électrique étant donné par une charge divisée par un temps on a

$$[\mathrm{A}] = \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{t}}\right]. \tag{5.2}$$

Un courant électrique ne peut passer qu'à condition qu'un chemin continu existe pour faire passer le courant. S'il y a une discontinuité le courant ne peut pas passer (voir fig. 5.3).

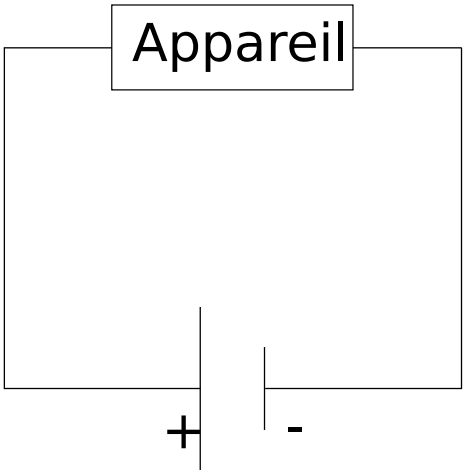

Figure 5.3: Un exemple de circuit simple avec un appareil électrique (une ampoule par exemple).

Dans le cas d'un courant continu, le courant est le même à n'importe quel point d'un circuit fermé. Ce fait est la conséquence de la conservation de la charge: la batterie ou un appareil électrique ne détruisent ni ne créent de charges nettes.

Exemple 24 *(Charge totale dans un circuit)*

Imaginons qu'un courant continu de 2.5 A passe dans un circuit pendant 5 minutes. Quelle est la charge totale qui est passée dans le circuit? Combien d'électrons cela fait?

Solution 24 *(Charge totale dans un circuit)*

Le courant étant la charge par unité de temps, on peut écrire

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t = 2.5 \cdot 300 = 750\text{C}. \tag{5.3}$$

Nous savons que la charge élémentaire est $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$. On a donc que

$$\frac{750}{e} \cong 4.7 \cdot 10^{21} \text{ électrons}. \tag{5.4}$$

Il existe une convention pas très intuitive pour le sens du courant dans un circuit qu'il vaut la peine de discuter ici. En effet, le sens du courant est vu comme le déplacement de charges **positives** (bien que ça soit les électrons qui se déplacent). Ainsi, le sens du courant est opposé au sens de déplacement des électrons (voir fig. 5.4).

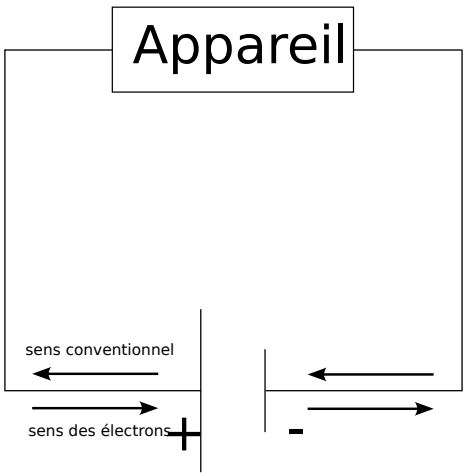

Figure 5.4: Schéma d'un circuit avec le sens du courant conventionnel et le sens de déplacement des électrons.

5.3 La loi d'ohm

La loi d'Ohm relie le courant, I, passant dans un circuit à la différence de potentiel qui lui est appliqué. Il s'avère que Ohm détermina que ces deux grandeurs sont proportionnelles (si on double le potentiel on double le courant) et

la constante de proportionnalité est R, la *résistance*

$$V = R \cdot I. \tag{5.5}$$

Cette formule est connue sous le petit nom de *Loi d'Ohm*. Il s'avère que R est indépendante de la tension ou du courant pour des métaux (ce n'est pas le cas pour d'autres types de matériaux comme les diodes, les transistors, etc.).

Question 21 *(Proportionnalité)*

Si pour un matériau de résistance R, nous traçons un graphique du courant I en fonction de la tension V, quelle sera la forme de la fonction obtenue?

Réponse 21 *(Proportionnalité)*

Comme nous savons que R est une constante, et que

$$I = \frac{V}{R}, \tag{5.6}$$

la fonction sera une droite de pente $1/R$.

Les unités de la résistance sont les Ohm, notées Ω. Dans un circuit électrique la résistance est représentée par le symbole de la fig. 5.5

Figure 5.5: Symbole de la résistance.

Question 22 *(Que se passe-t-il dans une résistance?)*

Un courant I passe dans une résistance R. Soient A et B un point du circuit avant la résistance et B un point après la résistance. Est-ce que le potentiel est plus élevé en A ou en B? Est-ce que le courant est plus élevé en A ou en B?

Réponse 22 *(Que se passe-t-il dans une résistance?)*

Une charge positive se déplace de + à − (d'un haut potentiel à un faible potentiel). Pour reprendre l'analogie avec le potentiel gravitationnel, une masse va se déplacer d'un haut potentiel gravitationnel à un faible. Ainsi pour un courant positif, le point A a un potentiel plus élevé que le point B.

Pour le courant en revanche, la conservation de la charge que toute charge entrant dans la résistance doive en sortir avec le même taux (sinon la charge

s'accumulerait, disparaîtrait, dans la résistance). Le courant n'est ainsi pas consommé à l'intérieur d'une résistance, tout comme une masse n'est pas consommée lorsqu'elle se déplace dans un champs gravitationnel.

5.4 La puissance électrique

Dans les applications quotidiennes, l'énergie électrique est souvent transformée en d'autres formes d'énergie:

- de l'énergie mécanique pour les voitures électriques ou les mixers,
- de l'énergie thermique pour les fours ou les appareils de chauffages.

Dans le cas de corps de chauffe, le processus de chauffage s'obtient car les électrons entrent en collision avec les atomes du corps de chauffe et leur transfèrent leur énergie cinétique. Les atomes augmentent ainsi leur énergie cinétique et la température augmente (on ne va pas entrer dans les détails de comment cette température est ensuite transférée au reste du monde).

La puissance électrique, P, est l'énergie transformée par unité de temps

$$P = \frac{\text{énergie transformée}}{\text{temps}}. \tag{5.7}$$

Question 23 *(Lien potentiel électrique et énergie transformée)*

Quelle est l'énergie transformée par une charge Q se déplaçant dans un champs V?

Réponse 23 *(Lien potentiel électrique et énergie transformée)*

On se souvient que le potentiel électrique en un point A est le potentiel l'énergie potentielle (E_{pot}) par unité de charge

$$V(A) = \frac{E_{\text{pot}}(A)}{Q}. \tag{5.8}$$

La différence d'énergie potentielle entre deux points (A et B) est donc

$$E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A) = V \cdot Q. \tag{5.9}$$

Ainsi la puissance électrique est donnée par

$$P = \frac{QV}{t}. \tag{5.10}$$

On se souvient que $I = Q/t$ (la charge déplacée par unité de temps) et on obtient

$$P = V \cdot I. \tag{5.11}$$

A présent, si on veut connaître l'énergie dissipée par unité de temps dans une résistance R on peut utiliser la fameuse loi d'Ohm ($V = R \cdot I$) et on obtient

$$P = R \cdot I^2, \tag{5.12}$$

ou

$$P = \frac{V^2}{R}. \tag{5.13}$$

Exemple 25 *(Lumière d'automobile)*

Calculer la résistance de l'ampoule de 40W d'une voiture fonctionnant à un voltage de 12V.

Solution 25 *(Lumière d'automobile)*

Connaissant la puissance $P = 40\text{W}$ et le voltage $V = 12\text{V}$, on peut utiliser

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{144}{40} = 3.6\Omega. \tag{5.14}$$

Votre facture d'électricité (ou celle de vos parents) est exprimée en kilowatt-heure

---

Question 24 *(Kilowatt-heure)*

Est-ce que quelqu'un sait ce que mesure un kilowatt-heure?

Réponse 24 *(Kilowatt-heure)*

Comme son nom l'indique (ou pas) le kilowatt-heure est un kilowatt (donc une puissance) utilisée pendant une heure. C'est donc une puissance multipliée par un temps ce qui donne une énergie (mesurée en joules). Plus précisément, on a

$$1\text{kWh} = 1000 \cdot 3600 = 3.6 \cdot 10^6\text{J}. \tag{5.15}$$

Exemple 26 *(La foudre)*

La foudre est un phénomène naturel très violent qui transfère une énergie d'environ 10^9J pendant un temps de 0.2s. La différence de potentiel électrique est d'environ $5 \cdot 10^7$V. Avec ces informations estimer la charge totale transférée entre les nuages et le sol, le courant dans la foudre, et la puissance moyenne libérée.

Solution 26 *(La foudre)*

Avec l'équation $E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A) = V \cdot Q$, on peut déduire que

$$Q = \frac{E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A)}{V} = 20\text{C}. \tag{5.16}$$

Le courant est donc donné par

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{20}{0.2} = 100\text{A}. \tag{5.17}$$

Finalement la puissance est de

$$P = \frac{\text{énergie}}{\text{temps}} = 5 \cdot 10^9\text{W}. \tag{5.18}$$

On voit qu'on obtient le même résultat avec

$$P = I \cdot V = 100 \cdot 5 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^9\text{W}. \tag{5.19}$$

Et c'est une bonne nouvelle.

Exercice 24 *(Chauffage)*

Soit un chauffage portatif dont le voltage de fonctionnement est de 230V et un courant de 7A. Quelle est la puissance nécessaire pour le faire fonctionner? Si le chauffage fonctionne deux heures par jour et que le coût du kilowatt-heure est de 0.3 CHF. Quel est le coût total mensuel du chauffage portatif?

5.5 Le courant alternatif

Lorsqu'une batterie est connectée à un circuit le courant est **continu**: les charges bougent de façon uniforme dans une seule direction. Le courant qu'on obtient de la part des SIG est lui **alternatif** (voir fig. 5.6).

Le courant alternatif modifie la direction du courant plusieurs fois par seconde (environ 6 fois par seconde dans le cas de la fig. 5.6). Le voltage produit par les générateurs alternatifs dépend du temps et peut être décrit par une fonction sinusoïdale

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi f t) = V_0 \sin(\omega t), \tag{5.20}$$

où le voltage oscille entre $-V_0$ et V_0 et est le voltage de pic. La fréquence f est le nombre d'oscillation par seconde du voltage (en Suisse la fréquence est de 50Hz), et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation.

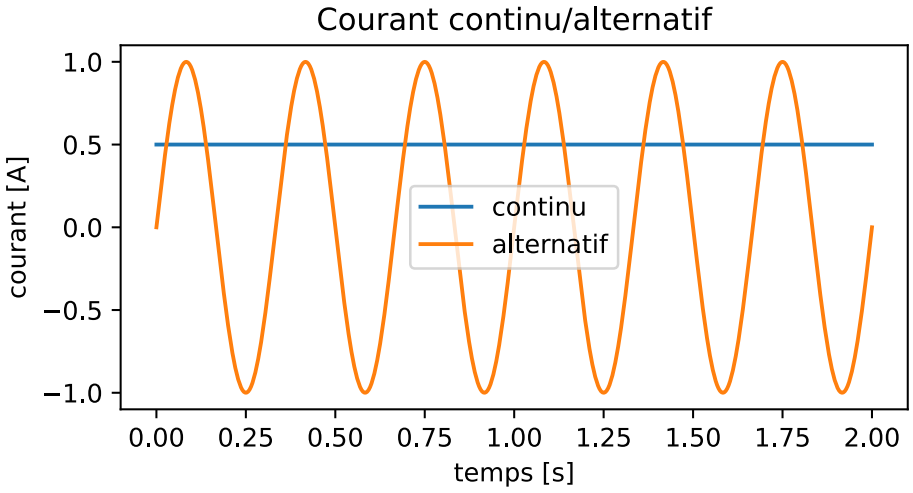

Figure 5.6: Illustration de courant continu, et de courant alternatif. (Source code)

La loi d'Ohm, $V = R \cdot I$, nous permet d'obtenir le courant dans un circuit dont la résistance serait R, avec

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t), \tag{5.21}$$

où $I_0 = V_0/R$ est le courant de pic. On voit ici que le courant peut être positif ou négatif et donc que les charges se déplacent dans les deux directions.

Le courant comme le voltage alternatif ont une moyenne nulle de voltage et de courant, cela ne signifie pas que les charges ne transportent pas d'énergie. En effet, on a pour la puissance

$$P(t) = I^2(t) \cdot R = I_0^2 \cdot R \cdot \sin^2(\omega t). \tag{5.22}$$

On voit de ce résultat (voir fig. 5.7) que la puissance est **toujours** positive (toutes les grandeurs sont positives dans cette formule).

La puissance moyenne, $\overline{P}$, est facilement calculée (on va le faire le calcul ici, mais on le voit bien sur l'illustration de fig. 5.7) et est donnée par

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}. \tag{5.23}$$

Question 25 *(Deux cent vingt volts)*

Mais me direz-vous, de quelle tension parlons-nous quand on parle de 230V à Genève? Est-ce la tension moyenne?

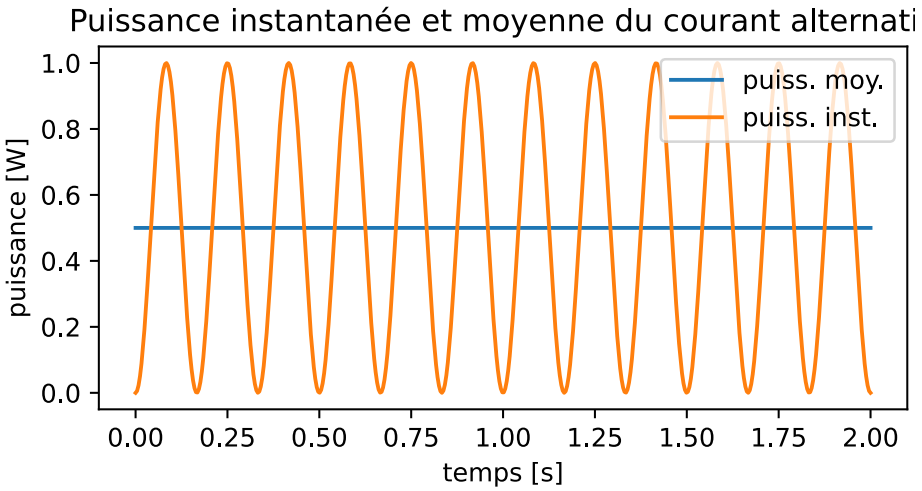

Figure 5.7: Puissance pour un courant alternatif. (Source code)

Réponse 25 *(Deux cent vingt volts)*

La tension moyenne d'un courant alternatif est nulle (oui la moyenne d'une fonction sinusoïdale est nulle). En revanche on peut calculer la moyenne du carré de la tension (ou du courant respectivement)

$$\overline{V^2} = \frac{1}{2}V_0^2, \quad \overline{I^2} = \frac{1}{2}I_0^2. \tag{5.24}$$

On va pas voir comment on calcule ce résultat mais c'est assez intuitif, comme le $\sin^2(x) \in [0,1]$ la moyenne doit être la moitié de la valeur maximale du dit sinus. Afin d'avoir les "bonnes" unités, on voit qu'on doit encore prendre la racine carrée de la moyenne et donc calculer l'écart-type (ou "root-mean-square" en anglais).

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0, \tag{5.25}$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_0. \tag{5.26}$$

Ces deux valeurs sont également appelées valeurs de courant et de tension effectives. Ainsi c'est V_{rms} qui est de 230V en Suisse. Ces deux valeurs permettent également de retrouver la valeur de la puissance moyenne

$$\overline{P} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}, \tag{5.27}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}I_0^2R = I_{\text{rms}}^2R, \tag{5.28}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}. \tag{5.29}$$

Ainsi la tension de pic, V_0 est donnée par

$$V_0 = \sqrt{2}V_{\text{rms}} = 325\text{V}. \tag{5.30}$$

Exemple 27 *(Sèche-cheveux)*

Calculer la résistance et le courant de pic dans un sèche-cheveux de 1000W branché sur une source de tension de 230V. Que se passe-t-il aux USA où la tension est de 120V seulement?

Solution 27 *(Sèche-cheveux)*

De l'équation

$$\overline{P} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}},$$

on obtient

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{P}}{V_{\text{rms}}} = \frac{1000}{230} = 4.35\text{A}.$$

Ainsi le courant de pic est donné par

$$I_0 = \sqrt{2} I_{\text{rms}} = 6.15\text{A}.$$

La résistance est donc donnée par

$$R = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{325}{6.15} = 52.8\Omega.$$

Aux USA, la tension étant de 120V, on obtient pour la puissance $\overline{P}$ disponible

$$\overline{P} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{120^2}{52.8} = 272\text{W}.$$

On voit qu'on risque d'avoir un problème pour faire fonctionner notre sèche cheveux à plein régime. A l'inverse un sèche-cheveux américain va très probablement griller si on le branche en Europe.

Chapitre 6

Les circuits électriques

Les circuits électriques sont les composants de bases de toute l'électronique. Nous allons décrire les circuits les plus simples ici sans aller dans des cas trop avancés.

6.1 Les résistances en série et en parallèle

Quand deux résistances ou plus sont connectées bouts à bouts sur un seul chemin comme sur la fig. 6.1 on dit qu'elles sont branchées **en série**.

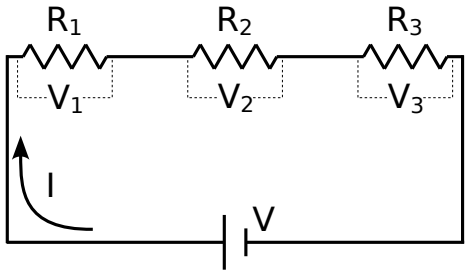

Figure 6.1: Les résistances R_1, R_2, R_3 sont connectées bout à bout à la source V et traversées par le courant I. La chute de voltage au travers des trois résistances est respectivement de V_1, V_2, V_3.

Toutes les charges passant par R_1 passera aussi par R_2 et R_3. On sait donc que le courant sera le même au travers de chaque résistance, sinon cela impliquerait que les résistances créeraient ou stockeraient des charges ce qui n'est pas observé dans les circuits (ou que la conservation de la charge ne serait pas respectée). Le voltage V (également appelée tension) et on suppose que les fils ont une résistance négligeable (nulle). On a que V_1, V_2, et V_3 sont les différences de potentiels au travers de chaque résistance. On sait de la loi d'Ohm que

$$V = RI,$$

et donc

$$V_1 = R_1 I, \quad V_2 = R_2 I, \quad V_3 = R_3 I.$$

Question 26 *(Conservation)*

Quelle est la relation entre V et V_1, V_2, V_3?

Réponse 26 *(Conservation)*

L'énergie étant conservée, on a naturellement que

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{6.1}$$

On déduit de cette relation que

$$V = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I, \tag{6.2}$$

et donc qu'on peut remplacer les trois résistances par une résistance équivalente (ou nette), où

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3. \tag{6.3}$$

Exemple 28 *(Trois résistances)*

Soit une source de tension qui produit un courant continu de 12V et trois résistances en série de 3Ω chacune connectées au circuit comme sur la fig. 6.1. Quelle est le courant total dans le circuit?

Solution 28 *(Trois résistances)*

Les trois résistances étant connectées en série, ce circuit est équivalent à un circuit avec une seule résistance de $R = R_1 + R_2 + R_3 = 9\Omega$. En utilisant ensuite la loi d'Ohm on obtient

$$I = V/R = 12/9 = 4\text{A}. \tag{6.4}$$

Une autre façon simple de connecter eds résistances sur un circuit est en **parallèle** (voir fig. 6.2). Les charges dans ce circuit suivent trois chemins différents et donc le courant total, I, est séparé en trois parties (pas forcément égales), I_1, I_2, et I_3.

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{6.5}$$

Dans ce type de circuit le courant n'est pas interrompu si une des résistances est déconnectée (dans le cas où un des appareils que la dite résistance représente arrête de fonctionner par exemple).

Quand les résistances sont en parallèle, le voltage qui les traverse doit être le même. En effet, étant donné qu'on néglige la résistance des fils, deux points

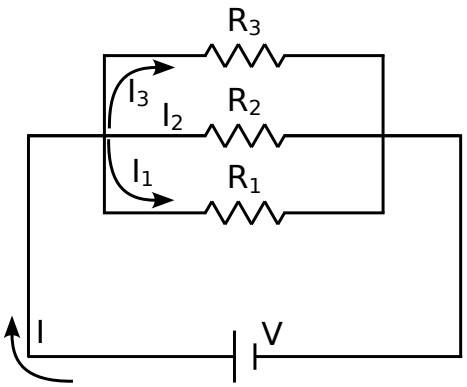

Figure 6.2: Les résistances R_1, R_2, R_3 sont connectées en parallèle à la source V et traversées par les courants I_1, I_2, I_3.

connectés directement entre eux ont le même voltage. Ainsi, on a pour les courants

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V}{R_3}. \tag{6.6}$$

De plus on sait de la loi d'Ohm, qu'on doit pouvoir remplacer les trois résistances par une unique résistance équivalent, R_{eq}, avec

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}}. \tag{6.7}$$

En mélangeant les 3 équations ci-dessus (voir éq. 6.5, éq. 6.6, et éq. 6.7), on obtient

$$\frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}, \tag{6.8}$$

et on déduit

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{6.9}$$

Exemple 29 *(Trois résistances en parallèle)*

Soit une source de tension qui produit un courant continu de 12V et trois résistances en parallèle de 3Ω chacune connectées au circuit comme sur la fig. 6.2. Quelle est la résistance équivalente?

Solution 29 *(Trois résistances en parallèle)*

Les trois résistances étant connectées en parallèle, on a que la résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1\frac{1}{\Omega}. \tag{6.10}$$

La résistance équivalente est donc de $R_{\text{eq}} = 1\Omega$.

On voit de l'exemple ci-dessus que la résistance équivalente est moindre que les résistances individuelles dans le cas où elles sont branchées en parallèle. Ceci peut paraître contre intuitif, mais c'est en fait assez raisonnable. Le circuit en parallèle permet aux charges de prendre différents chemins. Pour prendre une analogie, on peut imaginer le cas d'un barrage contenant de l'eau et deux tuyaux identiques reliant le barrage à la vallée. Le potentiel gravitationnel en haut du barrage est le même indépendamment du nombre de tuyaux. Quand on ouvre deux tuyaux on a deux fois plus d'eau qui s'écoule que si on en ouvre un seul (on a d'une certaines façon la résistance globale qui est divisée par deux). C'est un effet similaire pour les résistances en parallèle. Par ailleurs, si on ferme les vannes des deux tuyaux l'eau ne s'écoule plus. Cela est équivalent à un **circuit ouvert** (où le circuit ne se referme pas) où le courant ne peut s'écouler.

Question 27 *(Série ou parallèle)*

Soient deux ampoules identiques (et avec la même résistance). Quelle configuration produit le plus de lumière (série ou parallèle)? Dans quelle configuration est-il plus raisonnable de les brancher dans une voiture?

Réponse 27 *(Série ou parallèle)*

La résistance équivalente est plus faible en parallèle qu'en série, le courant total est plus élevé dans le cas parallèle. Ainsi, comme le voltage est le même dans les 2 cas, la puissance totale est plus élevée dans le cas parallèle

$$P = VI. \tag{6.11}$$

De plus, brancher les ampoules en parallèle permet d'avoir une ampoule qui fonctionne même si l'autre rend l'âme ce qui est quand même plus sûr.

Exercice 25 *(Résistances multiples)*

Deux résistances de 100Ω sont connectées en parallèle ou en série sur une batterie de 24V. Quel est le courant total dans chaque circuit? Et la résistance équivalente?

On peut faire évidemment beaucoup plus compliqué. Et on va le faire immédiatement.

Exemple 30 *(Plein de résistances)*

Soit le circuit de la fig. 6.3. Si la tension $V = 9$V.

1. Quel est le courant sort de la source de tension? $
2. Quel est le courant dans la résistance de 6Ω?

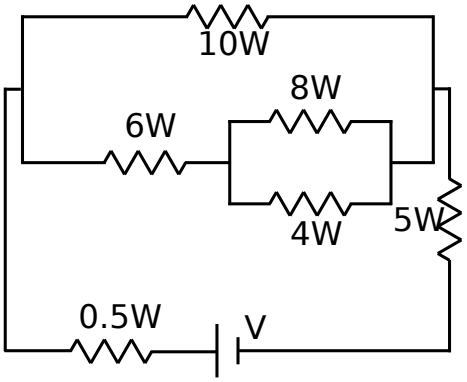

Figure 6.3: Un certain nombre de résitances…

La méthodologie globale pour résoudre ce genre d'exercice, est de déterminer la résistance équivalente du circuit en le décomposant en sous-circuits série/parallèle puis en utilisant la loi d'Ohm.

Solution 30 *(Plein de résistances)*

1. On commence par calculer la résistance équivalent des résistances 8Ω et 4Ω. Ces résistances sont en parallèle. On a donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq1}}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\frac{1}{\Omega}. \tag{6.12}$$

   On a donc que $R_{\text{eq1}} = 2.7\Omega$ (voir fig. 6.4)

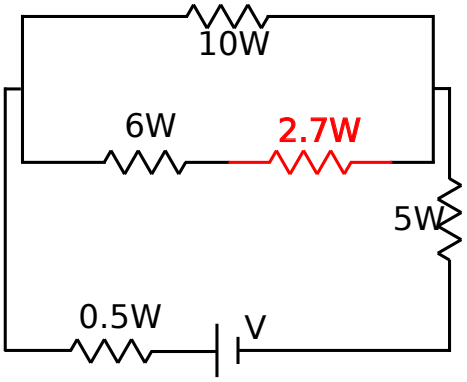

Figure 6.4: Un certain nombre de résitances, moins 1…

Puis vient le temps de calculer la résistance équivalente des résistances de 6Ω et 2.7Ω. Ces résistances sont en série, donc il suffit de les sommer et on a $R_{\text{eq2}} = 6 + 2.7 = 8.7\Omega$ (voir fig. 6.5)

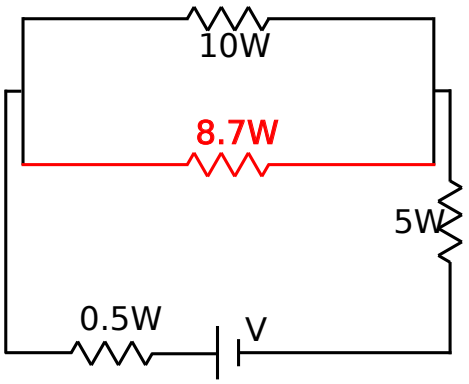

Figure 6.5: Un certain nombre de résitances, moins 2...

On a à présent les résistances de 10Ω et 8.7Ω qui sont en parallèle et on calcule

$$\frac{1}{R_{\text{eq3}}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8.7} = 0.21\frac{1}{\Omega}, \tag{6.13}$$

et il vient $R_{\text{eq3}} = 4.8\Omega$ (voir fig. 6.6).

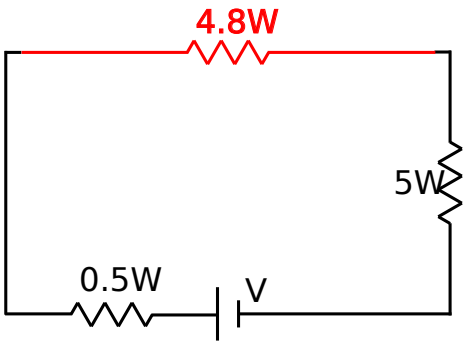

Figure 6.6: Un certain nombre de résitances, moins 3...

Finalement, on a trois résistances en série qu'on peut simplement sommer et il vient

$$R_{\text{eq}} = 0.5 + 5 + 4.8 = 10.3\Omega. \tag{6.14}$$

On peut à présent calculer le courant dans le circuit avec la loi d'Ohm

$$V = R_{\text{eq}} I \Leftrightarrow I = \frac{9}{10.3} = 0.87\text{A}. \tag{6.15}$$

2. Le courant dans la résistance de 6Ω doit être la même que dans la branche correspondant à R_{eq2}. On doit encore calculer la tension V_2 aux bornes du sous-circuit du haut. On a que

$$V = V_1 + V_{2+3} \Leftrightarrow V_2 = V - V_1 - V_3 = V - (0.5 + 5) \cdot 0.87 = 4.3\text{V}. \tag{6.16}$$

Et finalement que

$$I = \frac{4.3}{8.7} = 0.48\text{A}. \tag{6.17}$$

Pour des circuits beaucoup plus compliqués que ceux vus ici, il faut noter qu'il y a un ensemble de règles qu'on peut appliquer pour déterminer le courant dans un circuit: les **lois de Kirchhoff**. Il s'agit d'un certain nombre de règles très pratiques qui sont des applications des lois de conservation que nous avons déjà vues.

Le première loi de Kirchhoff est basée sur la loi de conservation de la charge électrique. Elle dit que:

À une intersection, la somme de tous les courants entrant dans l'intersection, doit être égale à la somme des courants quittant l'intersection.

Pour résumer, tout ce qui entre à une intersection doit en sortir (sinon ça voudrait dire qu'il y a une fuite ou une source quelque part). Par exemple sur la figure fig. 6.7, on voit qu'à l'intersection a, on a le courant I_1 qui est entrant, et les courant I_2 et I_3 qu sont sortants. Ainsi on a $I_1 = I_2 + I_3$.

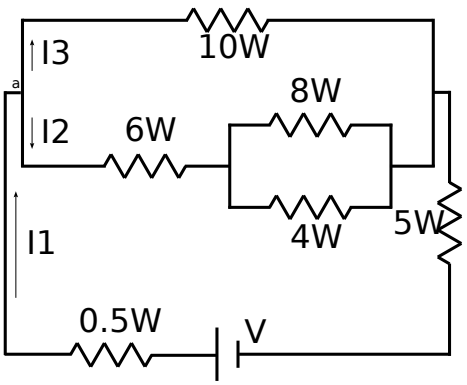

Figure 6.7: Illustration de la 1e loi de Kirchhoff

La seconde loi de Kirchhoff, est une application de la conservation de l'énergie. Elle dit que sur n'importe quelle chemin fermé, le changement de potentiel doit être nul.

Ainsi sur la fig. 6.8, on a deux résistances, R_1 et R_2, ainsi qu'ûn potentiel V. Si on démarre du point a, on a un potentiel V qui est inchangé. Puis au point b, avant R_1, on a toujours le même potentiel. Au point c, on a une première chute de potentiel, car R_1 est passée par là. Puis en d on atteint un potentiel nul (toute l'énergie a été consommée) après avoir passé R_2. Le potentiel en e est toujours nul. Puis on repasse par la batterie, et on revient en a pour fermer la boucle. En a on a avoir à nouveau un potentiel V et ainsi on voit que le changement de potentiel est nul.

Nous avons déjà analysé de tels circuits précédemment. On si V, R_1 et R_2 sont

donnés, nous avons que

$$V = (R_1 + R_2)I,$$
$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}. \tag{6.18}$$

La charge et le courant étant conservés, on a que le courant passant par R_1 et R_2 est toujours le même. On a donc que $V_{cb} = -IR_1$ et $V_{dc} = -IR_2$ (contrairement V qui lui est positif). Ces deux voltage sont *négatifs* car ils vont faire baisser le potentiel. On a donc finalement que

$$V + V_{cb} + V_{dc} = 0. \tag{6.19}$$

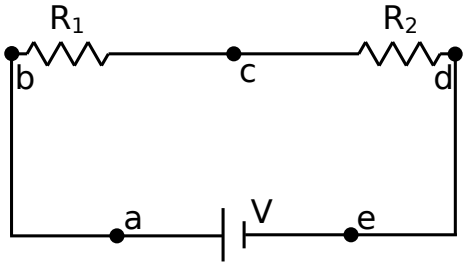

Figure 6.8: Illustration de la 2e loi de Kirchhoff

6.2 Les circuits contenant des capacités en parallèle ou en série

Comme les résistances, les capacités peuvent être placée en série ou en parallèle. Pour le cas parallèle (voir fig. 6.9) chaque capacité est soumise à la même différence de potentiel V. Ainsi les 3 capacités ont les charges

$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V, \quad Q_3 = C_3 V. \tag{6.20}$$

La conservation de la charge impose que la charge totale sortant de la source de tension est donnée par

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \tag{6.21}$$

Si nous essayons de décrire ce circuit sous forme de circuit équivalent avec une seule capacité,

$$Q = C_{\text{eq}} V, \tag{6.22}$$

on voit que

$$C_{\text{eq}} V = Q_1 + Q_2 + Q_3, C_{\text{eq}} V \quad = (C_1 + C_2 + C_3)V, C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Considérons maintenant le cas de capacités en série (voir fig. 6.10).

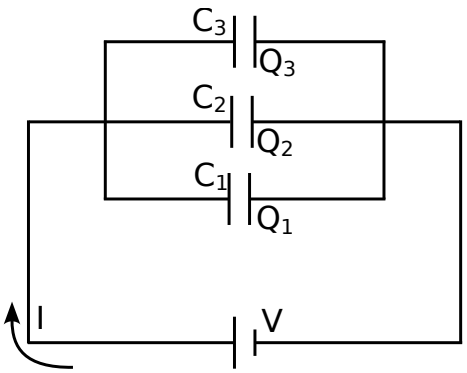

Figure 6.9: Les résistances C_1, C_2, C_3 sont connectées en parallèle à la source V et accumulent les charges Q_1, Q_2, Q_3.

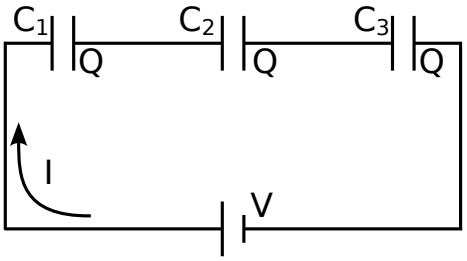

Figure 6.10: Les résistances C_1, C_2, C_3 sont connectées en série à la source V et accumulent les charges Q.

Question 28 *(Capacité équivalente)*

Déterminer la capacité équivalente des capacités branchées en série.

Indication: Il faut évaluer V en fonction des chutes de potentiel.

Réponse 28 *(Capacité équivalente)*

Le voltage total au travers de toutes les capacités doit être donné par la somme des voltages au travers de chaque capacité

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{6.23}$$

On sait aussi que le charge est la même sur chaque capacité (conservation de la charge) et donc

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2 = C_3 V_3. \tag{6.24}$$

On peut réécrire éq. 6.23 comme

$$\frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right). \tag{6.25}$$

6.3 Les circuits RC

Souvent les capacités et résistances sont connectées en série dans les circuits électriques (voir fig. 6.11). C'est même un composant essentiel dans quasiment tous les circuits du monde. Ces circuits sont particulièrement utiles quand les courant n'est pas stationnaire (qu'il dépend du temps). Dans cette section on va analyser les circuits RC dans certains cas particuliers.

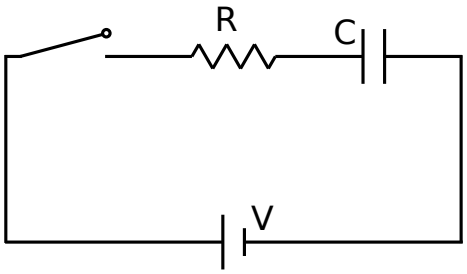

Figure 6.11: Exemple de circuit RC.

6.3.1 La charge du condensateur

Quand le circuit RC est *fermé*, le courant s'établit dans le circuit, les charges vont se mettre en mouvement et s'accumuler sur le condensateur. Au fur et à mesure que les charges s'accumulent sur le condensateur, la tension entre les plaques augmente aussi (on se souvient de la fameuse formule $V_C = Q/C$) jusqu'à atteindre la valeur de celle de la source de voltage (la batterie). A ce

moment là, il n'y a plus de courant et plus de différence de potentiel entre les bornes de la résistance. Le potentiel entre les plaques du condensateur est donné par l'équation (voir fig. 6.12)

$$V_C = V(1 - \exp(-t/(RC))). \tag{6.26}$$

On voit bien qu'à $t = 0$, le potentiel et nul et qu'avec $t \to \infty$ on tend vers $V_C = V$.

Question 29 *(Unités…)*

Quelles sont les unités de $R \cdot C$?

Réponse 29 *(Unités…)*

Les unités de la résistance sont des Ohm, [Ω] = [V]/[A] et [A] = [C]/[s], et la capacité, des Farad, [F] = [C]/[V]. Il vient que les unités de $R \cdot C$ sont des …. secondes!

On appelle

$$\tau = RC, \tag{6.27}$$

la constante de temps du circuit. Cette grandeur donne le temps caractéristique qu'il faut pour que la tension (et la charge) dans le condensateur atteigne 63% de la valeur maximale de la tension de la batterie.

Exercice 26 *(preuve)*

Pouvez vous prouver cette affirmation (sur les 63% donc)?

Question 30 *(La charge dans le condensateur)*

Comment calcule-t-on la charge dans le condensateur?

Réponse 30 *(La charge dans le condensateur)*

Comme $Q = V_C \cdot C$, on a immédiatement que

$$Q = Q_0(1 - e^{-t/(RC)}), \tag{6.28}$$

avec Q_0 =V C$.

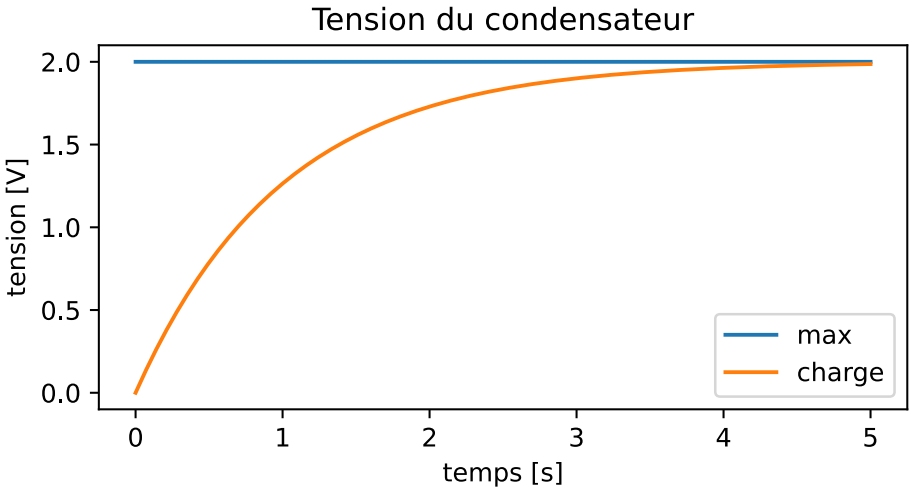

Figure 6.12: Illustration de la charge du condensateur. (Source code)

6.3.2 La décharge du condensateur

Maintenant que nous avons chargé le condensateur, si nous ouvrons le circuit celui-ci va se décharger. Si nous avons une tension V_0 dans le condensateur va se décharger en suivant une exponentielle décroissante (voir #fig:rc_decharge)

$$V_C = V_0 e^{-t/(RC)}. \tag{6.29}$$

Comme pour la charge $\tau = RC$, nous donne le temps qu'il faut pour que la tension dans le condensateur diminue de 63% de V_0. La charge dans le condensateur suit la même tendance, avec

$$Q = Q_0 e^{-t/(RC)}, \tag{6.30}$$

où $Q_0 = V_0 C$.

Exemple 31 *(Décharge du condensateur)*

Si un condensateur de $C = 10\mu\text{F}$ est connectée à une résistance de $R = 100\Omega$ et possède une tension de V_0. Quand le condensateur se décharge, combien de temps faut-il pour que sa tension tombe à 10% de sa valeur originale?

Solution 31 *(Décharge du condensateur)*

Comme la tension d'un condensateur se diminue comme

$$V_C = V_0 e^{-t/(RC)},$$

et qu'on veut connaître le temps nécessaire pour que $V_C = 0.1V_0$, on peut écrire

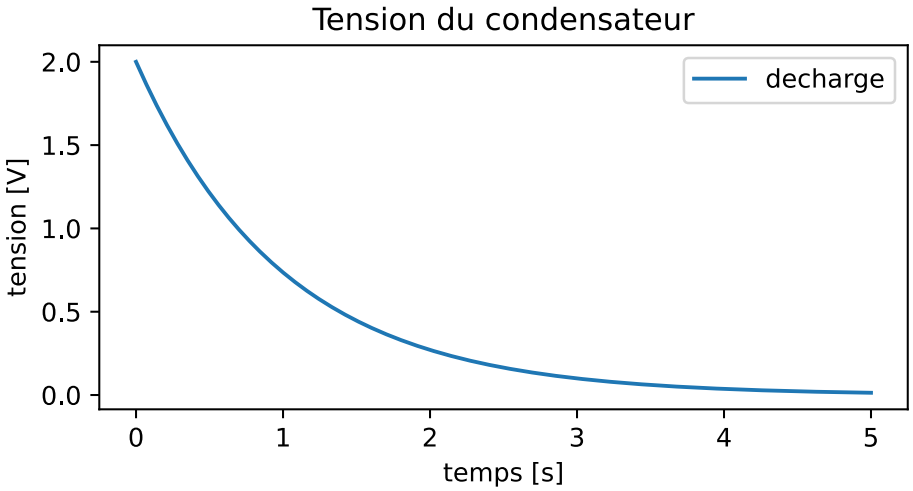

Figure 6.13: Illustration de la charge du condensateur. (Source code)

l'équation

$$\begin{aligned} 0.1V_0 &= V_0 e^{-t/(RC)}, \\ 0.1 &= e^{-t/(RC)}, \\ 0.1 &= e^{-t/(10^{-5}\cdot 100)}, \\ \ln 0.1 &= -10^3 t, \\ t &= 0.0023\text{s}. \end{aligned}$$

Chapitre 7

Remerciements

Je voudrais remercier (par ordre alphabétique) les contributeurs à ce cours qui ont contribué à améliorer ce polycopié. En espérant que cette liste continuera à s'allonger avec les années. Merci à A. Benzonana, F. Burgener, T. Cavagna, S. Crockett, M. El Kharroubi, P. Montandon, F. Obaly, I. Saroukhanian, C. Volta, et J. Vouillamoz.