Fin des tables de hachages et arbres

Algorithmique et structures de données, 2023-2024

P. Kunzli (Cloud) et O. Malaspinas (A401), ISC, HEPIA

2024-02-27

En partie inspirés des supports de cours de P. Albuquerque

Rappel

- Qu'est-ce qu'une table de hachage?

Rappel

- Qu'est-ce qu'une table de hachage?
- Structure de données abstraite où chaque *valeur* (ou élément) est associée à une *clé* (ou argument).
- Quelles sont les fonctions typiques définies sur les tables?

Rappel

- Qu'est-ce qu'une table de hachage?
- Structure de données abstraite où chaque *valeur* (ou élément) est associée à une *clé* (ou argument).
- Quelles sont les fonctions typiques définies sur les tables?
- Insetion, consultation, suppression.

```
void insert(table, key, value)
value get(table, key)
value remove(table, key)
```

- Comment fait-on le lien entre une clé et une valeur dans le tableau?

Rappel

- Qu'est-ce qu'une table de hachage?
- Structure de données abstraite où chaque *valeur* (ou élément) est associée à une *clé* (ou argument).
- Quelles sont les fonctions typiques définies sur les tables?
- Insetion, consultation, suppression.

```
void insert(table, key, value)
value get(table, key)
value remove(table, key)
```

- Comment fait-on le lien entre une clé et une valeur dans le tableau?
- On hache!

Exercice 2

- Reprendre l'exercice 1 et utiliser la technique de double hachage pour traiter les collisions avec

$$h_1(k) = k \mod 13,$$
$$h_2(k) = 1 + (k \mod 11).$$

* La fonction de hachage est donc $h(k) = (h(k) + h_2(k))\%13$ en cas de collision.

Exercice 3

- Stocker les numéros de téléphones internes d'une entreprise suivants dans un tableau de 10 positions.
- Les numéros sont compris entre 100 et 299.
- Soit N le numéro de téléphone, la fonction de hachage est

$$h(N) = N \mod 10.$$

- La fonction de gestion des collisions est

$$C_1(N, i) = (h(N) + 3 \cdot i) \mod 10.$$

- Placer 145, 167, 110, 175, 210, 215 (mettre son état à occupé).
- Supprimer 175 (rechercher 175, et mettre son état à supprimé).
- Rechercher 35.
- Les cases ni supprimées, ni occupées sont vides.
- Expliquer se qui se passe si on utilise?

$$C_1(N, i) = (h(N) + 5 \cdot i) \mod 10.$$

Préambule

- On considère pas le cas du chaînage en cas de collisions.
- L'insertion est construite avec une forme du type

```
index = h(key);
while (table[index].state == OCCUPIED
       && table[index].key != key) {
   index = (index + k) % table_size; // attention à pas dépasser
}
table[index].key = key;
table[index].state = OCCUPIED;
```

- Gestion de l'état d'une case *explicite*

```
typedef enum {EMPTY, OCCUPIED, DELETED} state;
```

L'insertion

Pseudocode?

L'insertion

Pseudocode?

```
rien insertion(table, clé, valeur) {
    index = hash(clé)
    index =
        tant que état(table[index]) == occupé et clé(table[index
            index = rehash(clé)

    état(table[index]) = occupé
    table[index] = valeur
}
```

La suppression

Pseudocode?

La suppression

Pseudocode?

```
valeur suppression(table, clé):
    index = hash(clé)
    tant que état(table[index]) != vide:
        si état(table[index]) == occupé et clé(table[index]) ==
            état(table[index]) = supprimé
        sinon
            index = rehash(clé)
}
```

La recherche

Pseudocode?

La recherche

Pseudocode?

```
booléen recherche(table, clé) {
    index = hash(clé)
    tant que état(table[index]) != vide:
        si état(table[index]) == occupé et clé(table[index]) ==
            retourner vrai
        sinon
            index = rehash
    retourner faux
}
```

Écrivons le code!

- Mais avant:
  - Quelles sont les structures de données dont nous avons besoin?
  - Y a-t-il des fonctions auxiliaires à écrire?
  - Écrire les signatures des fonctions.

Écrivons le code!

- Mais avant:
  - Quelles sont les structures de données dont nous avons besoin?
  - Y a-t-il des fonctions auxiliaires à écrire?
  - Écrire les signatures des fonctions.

Structures de données

Écrivons le code!

- Mais avant:
  - Quelles sont les structures de données dont nous avons besoin?
  - Y a-t-il des fonctions auxiliaires à écrire?
  - Écrire les signatures des fonctions.

Structures de données

```
typedef enum {empty, deleted, occupied};
typedef ... key_t;
typedef ... value_t;
typedef struct _cell_t {
    key_t key;
    value_t value;
    state_t state;
} cell_t;
typedef struct _hm {
    cell_t *table;
    int capacity;
    int size;
} hm;
```

Écrivons le code!

Fonctions auxiliaires

Écrivons le code!

Fonctions auxiliaires

```
static int hash(key_t key);
static int rehash(int index, key_t key);
static int find_index(hm h, key_t key);
```

Signature de l'API

Écrivons le code!

Fonctions auxiliaires

```
static int hash(key_t key);
static int rehash(int index, key_t key);
static int find_index(hm h, key_t key);
```

Signature de l'API

```
void hm_init(hm *h, int capacity);
void hm_destroy(hm *h);
bool hm_set(hm *h, key_t key, value_t *value);
bool hm_get(hm h, key_t key, value_t *value);
bool hm_remove(hm *h, key_t key, value_t *value);
bool hm_search(hm h, key_t key);
void hm_print(hm h);
```

Live code session!

0. Offered to you by ProtonVPN[1]!

[1] The fastest way to connect to BBB!

Live code session!

0. Offered to you by ProtonVPN[1]!

1. Like the video.
2. Subscribe to the channel.
3. Use our one time voucher for ProtonVPN: `PAULISAWESOME`.
4. Consider donating on our patreon.

[1] The fastest way to connect to BBB!

{Les arbres}

Les arbres: définition

"Un arbre est un graphe acyclique orienté possédant une unique racine, et tel que tous les nœuds sauf la racine ont un unique parent."

Les arbres: définition

"Un arbre est un graphe acyclique orienté possédant une unique racine, et tel que tous les nœuds sauf la racine ont un unique parent."

Santé!

Plus sérieusement

- Ensemble de **nœuds** et d'**arêtes** (graphe),
- Les arêtes relient les nœuds entre eux, mais pas n'importe comment: chaque nœud a au plus un **parent**,
- Le seul nœud sans parent est la **racine**,
- Chaque nœud a un nombre fini d'**enfants**,
- La hiérarchie des nœuds rend les arêtes **orientées** (parent -> enfants), et empêche les **cycles** (acyclique, orienté).
- La **feuille** ou **nœud terminal** est un nœud sans enfants,
- Le **niveau** est 1 à la racine et **niveau+1** pour les enfants,
- Le **degré** d'un nœud est le nombre de enfants du nœud.

Les arbres: définition

"Un arbre est un graphe acyclique orienté possédant une unique racine, et tel que tous les nœuds sauf la racine ont un unique parent."

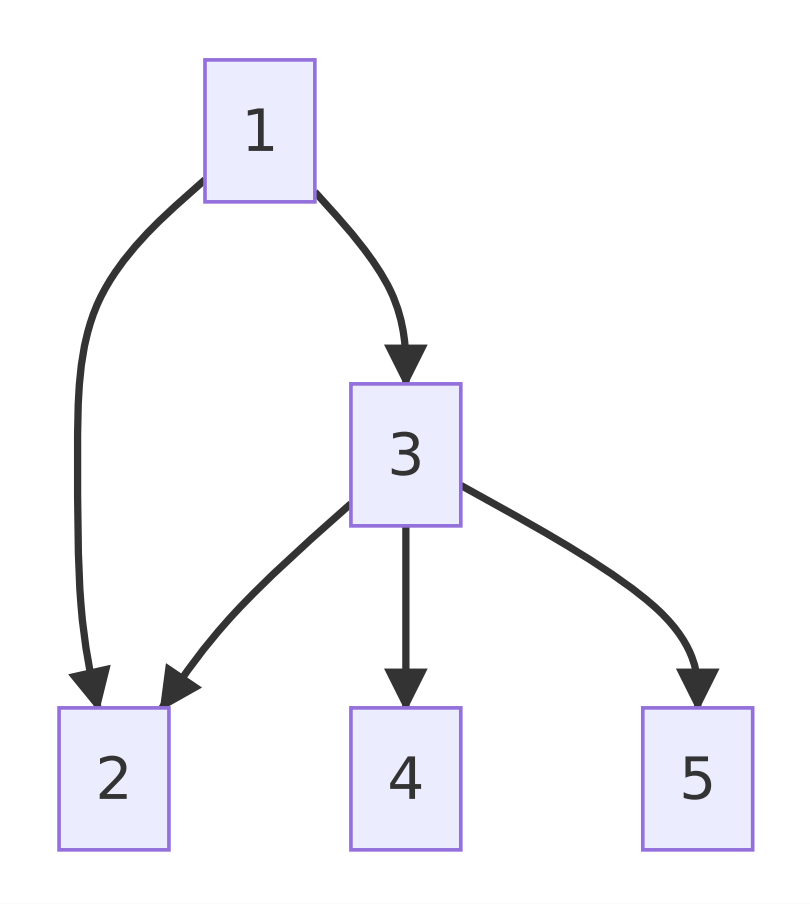
Santé!

Plus sérieusement

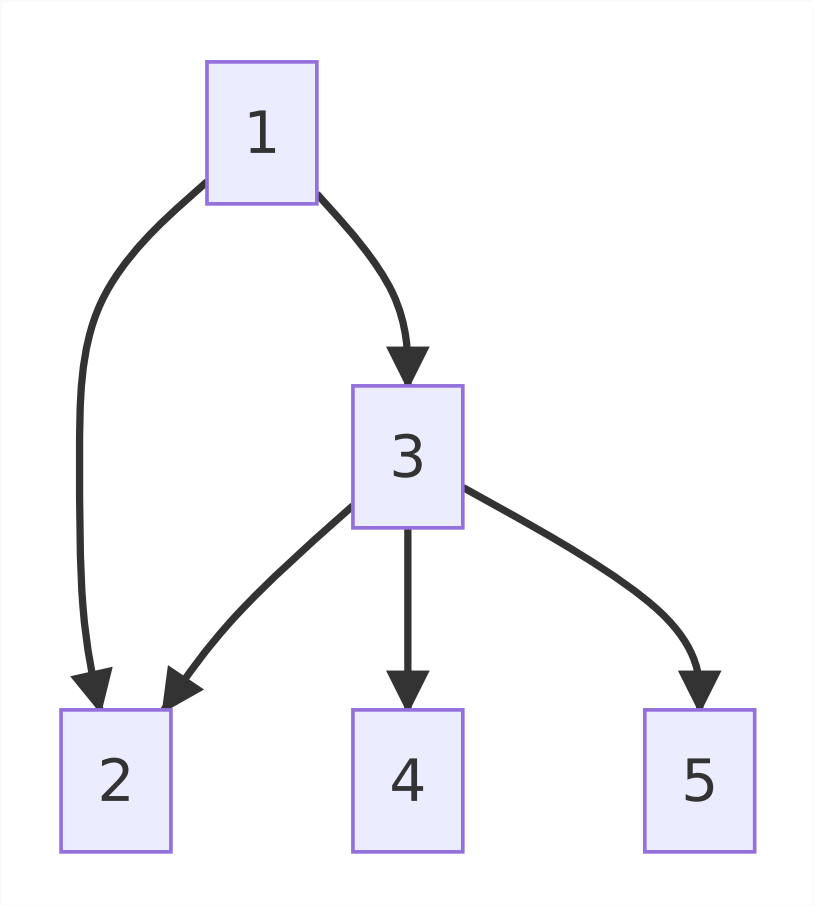
- Ensemble de **nœuds** et d'**arêtes** (graphe),
- Les arêtes relient les nœuds entre eux, mais pas n'importe comment: chaque nœud a au plus un **parent**,
- Le seul nœud sans parent est la **racine**,
- Chaque nœud a un nombre fini d'**enfants**,
- La hiérarchie des nœuds rend les arêtes **orientées** (parent -> enfants), et empêche les **cycles** (acyclique, orienté).
- La **feuille** ou **nœud terminal** est un nœud sans enfants,
- Le **niveau** est 1 à la racine et **niveau+1** pour les enfants,
- Le **degré** d'un nœud est le nombre de enfants du nœud.

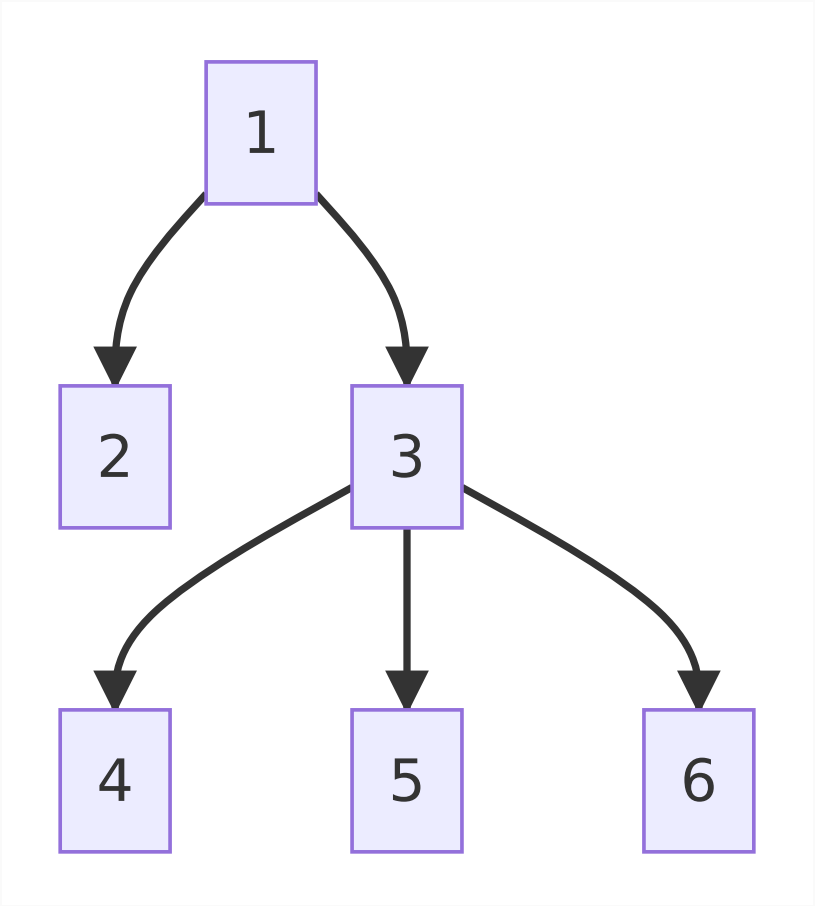
- Chaque nœud est un arbre en lui même.
- La **récursivité** sera très utile!

Arbre ou pas arbre?

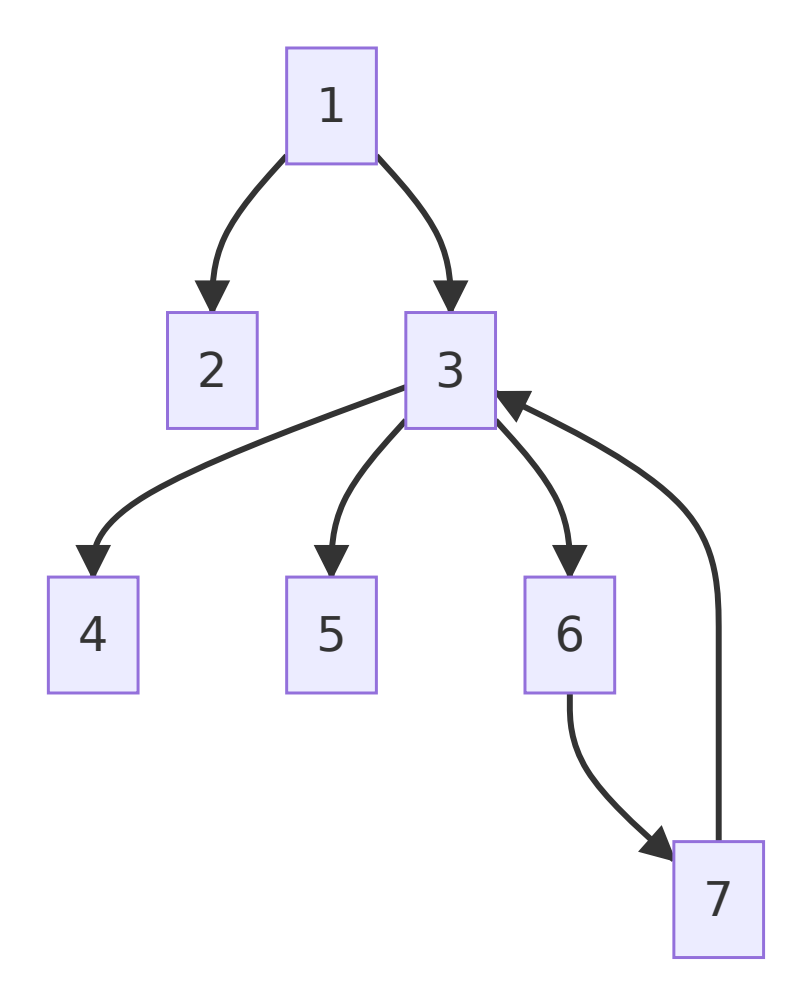


Arbre ou pas arbre?

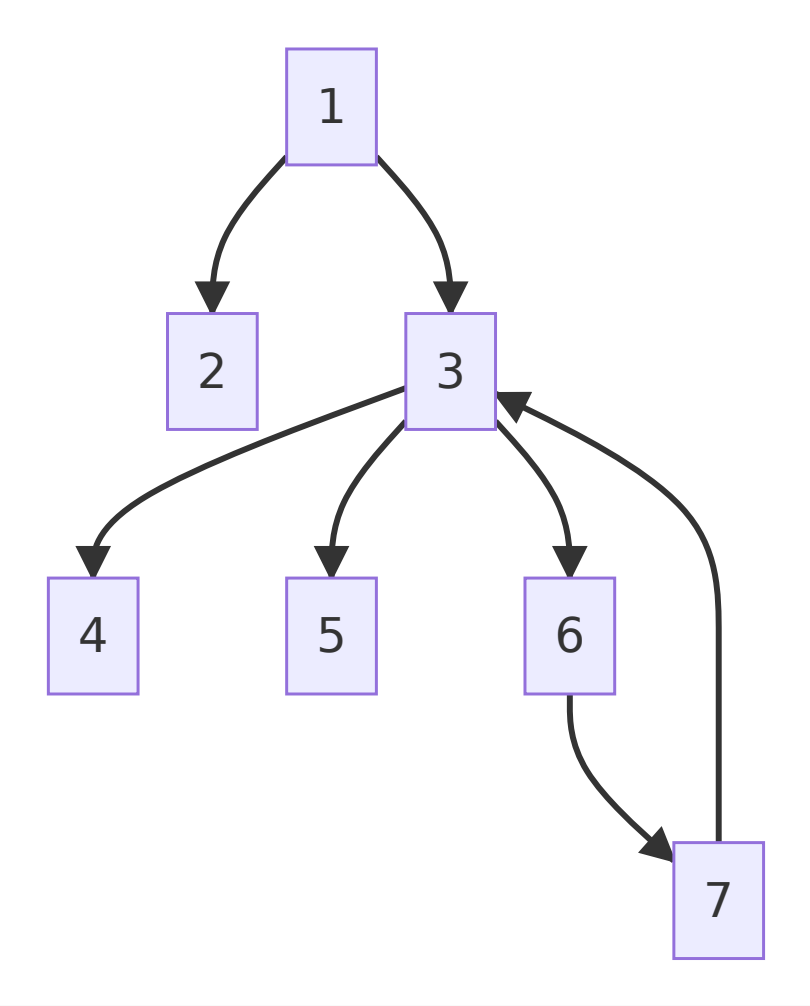


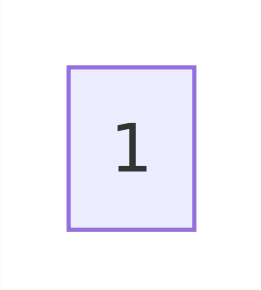


Arbre ou pas arbre?

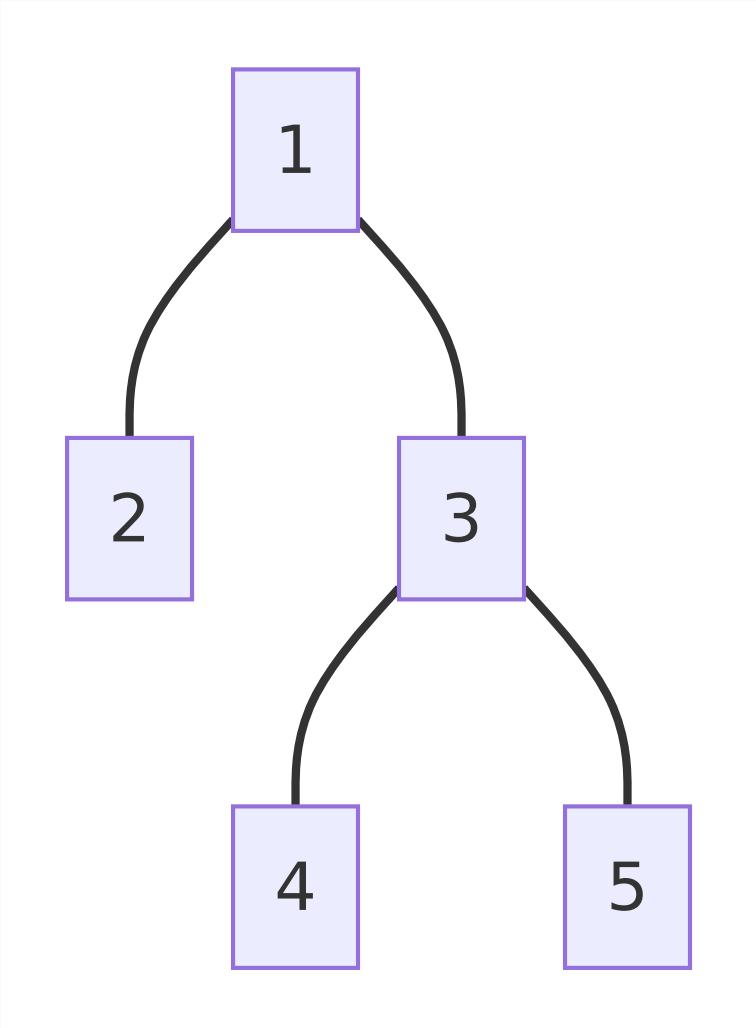


Arbre ou pas arbre?

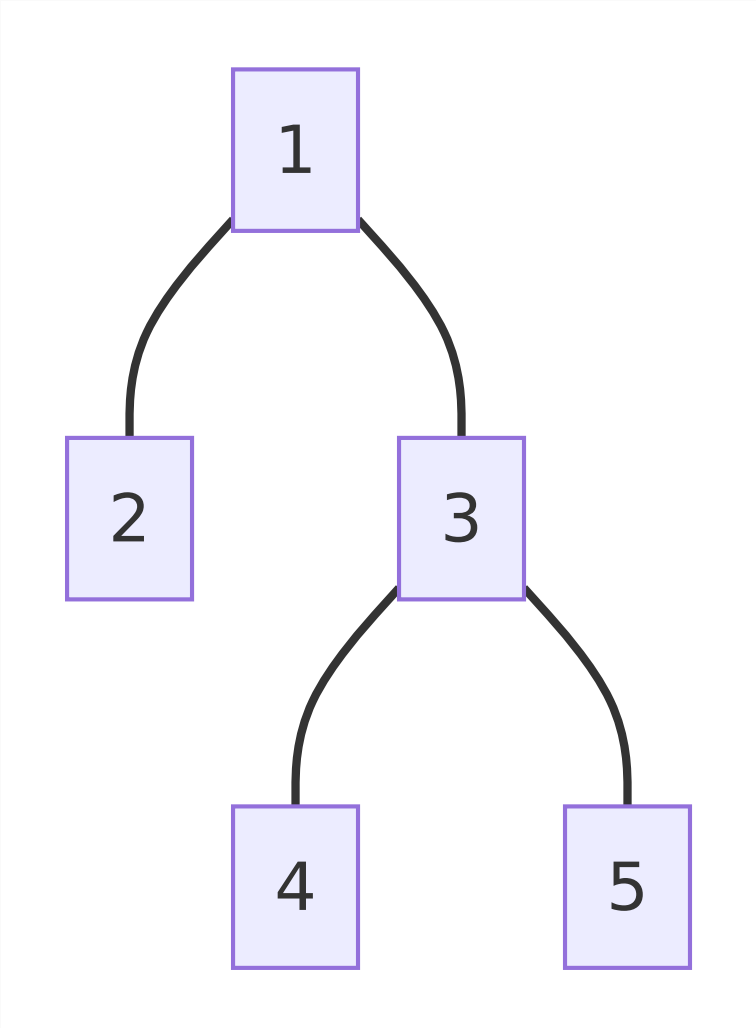


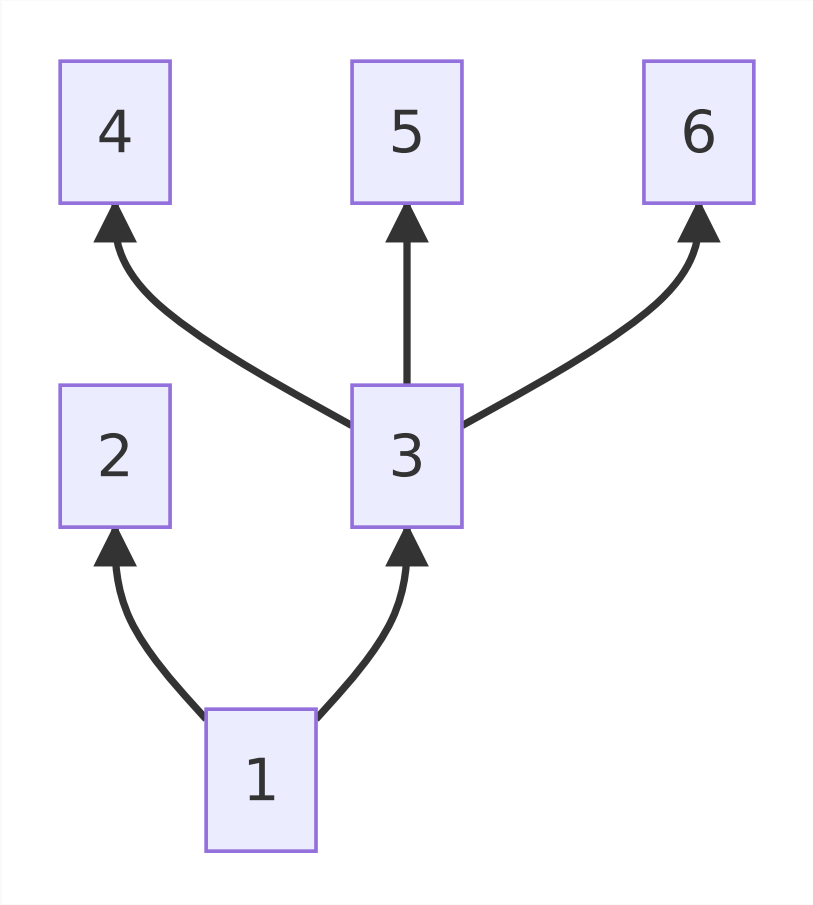


Arbre ou pas arbre?



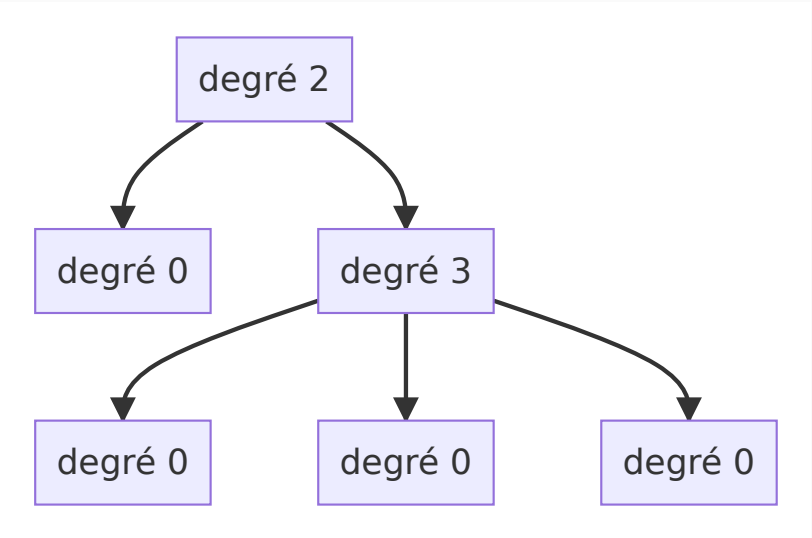
Arbre ou pas arbre?





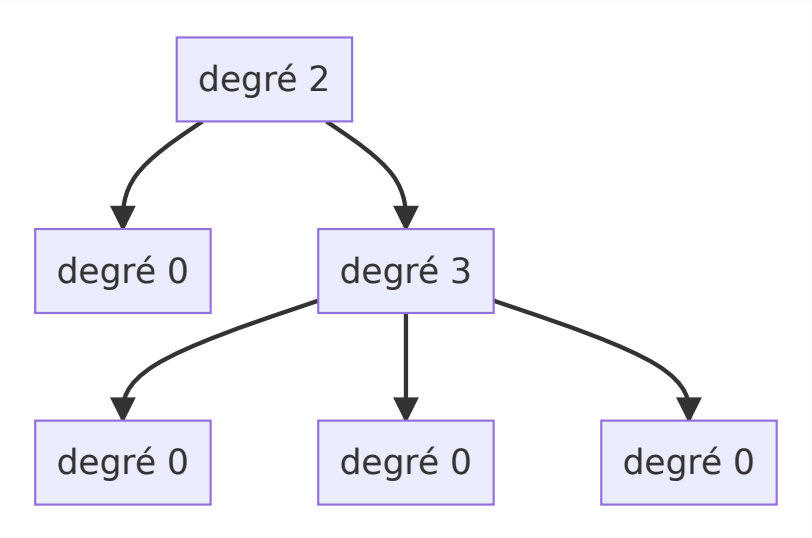
Degré et niveau

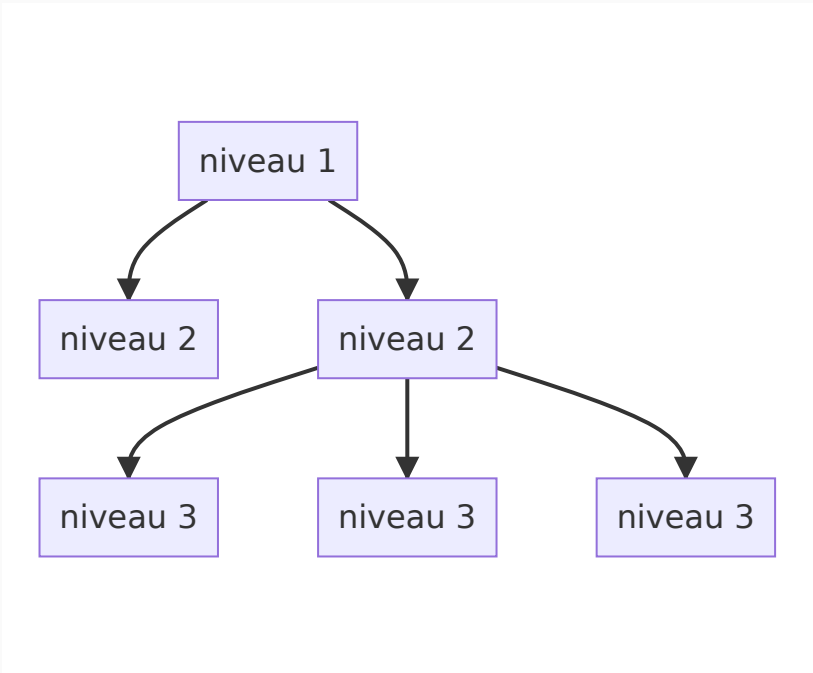
- Illustration du degré (nombre d'enfants) et du niveau (profondeur)



Degré et niveau

- Illustration du degré (nombre d'enfants) et du niveau (profondeur)





- Les nœuds de degré 0, sont des feuilles.

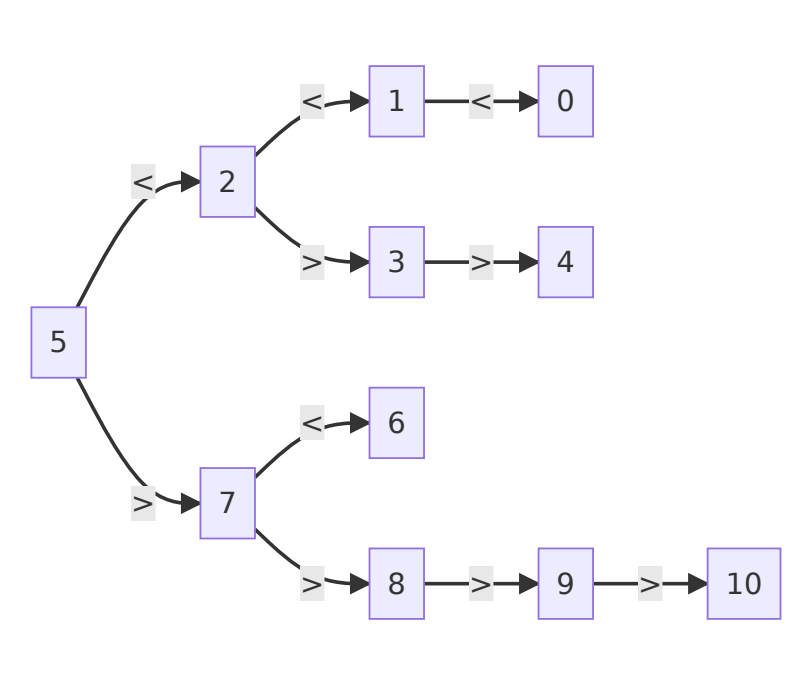
Application: recherche rapide

Pouvez vous construire un arbre pour résoudre le nombre secret?

Application: recherche rapide

Pouvez vous construire un arbre pour résoudre le nombre secret?

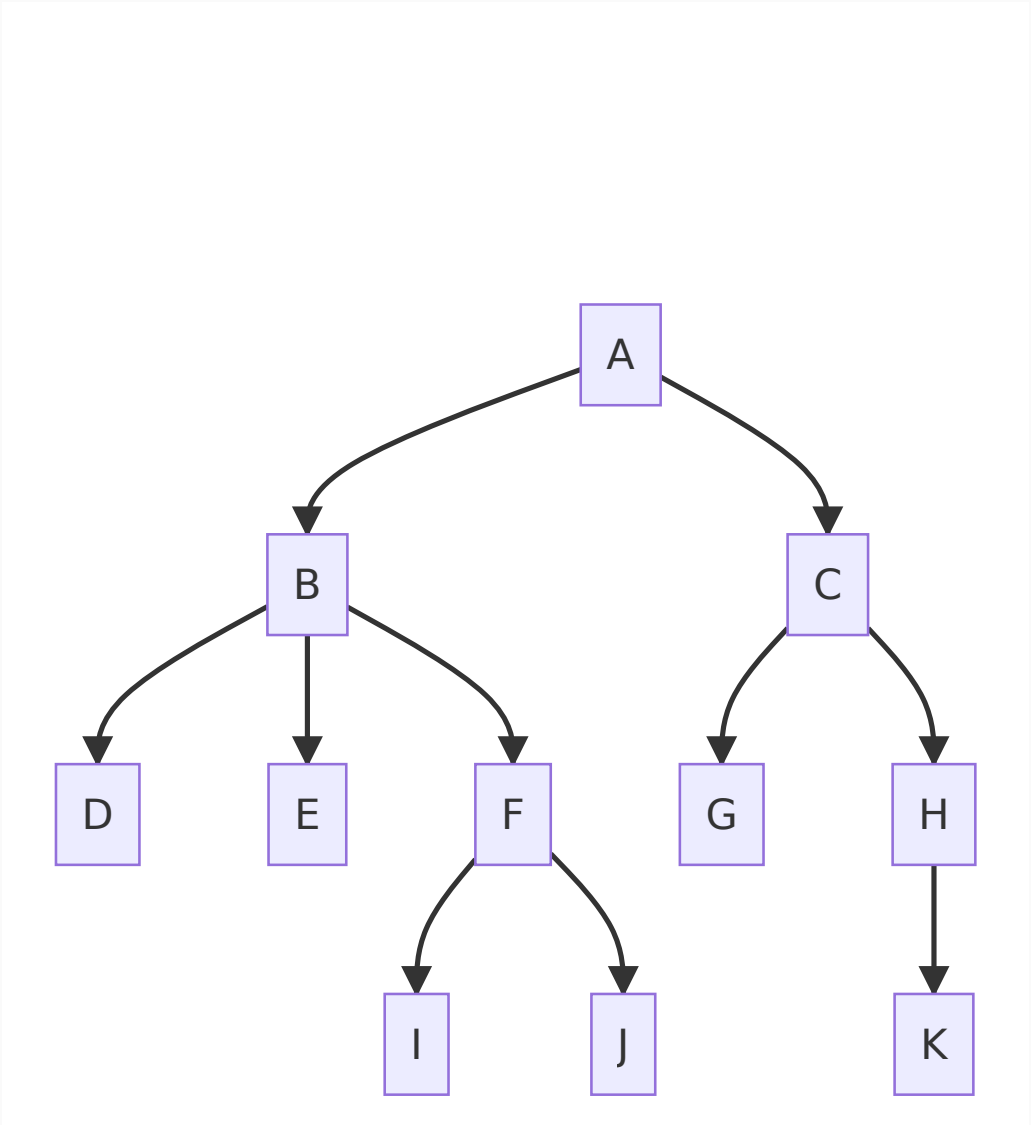
- Le nombre secret ou la recherche dichotomique (nombre entre 0 et 10).



Question: Quelle est la complexité pour trouver un nombre?

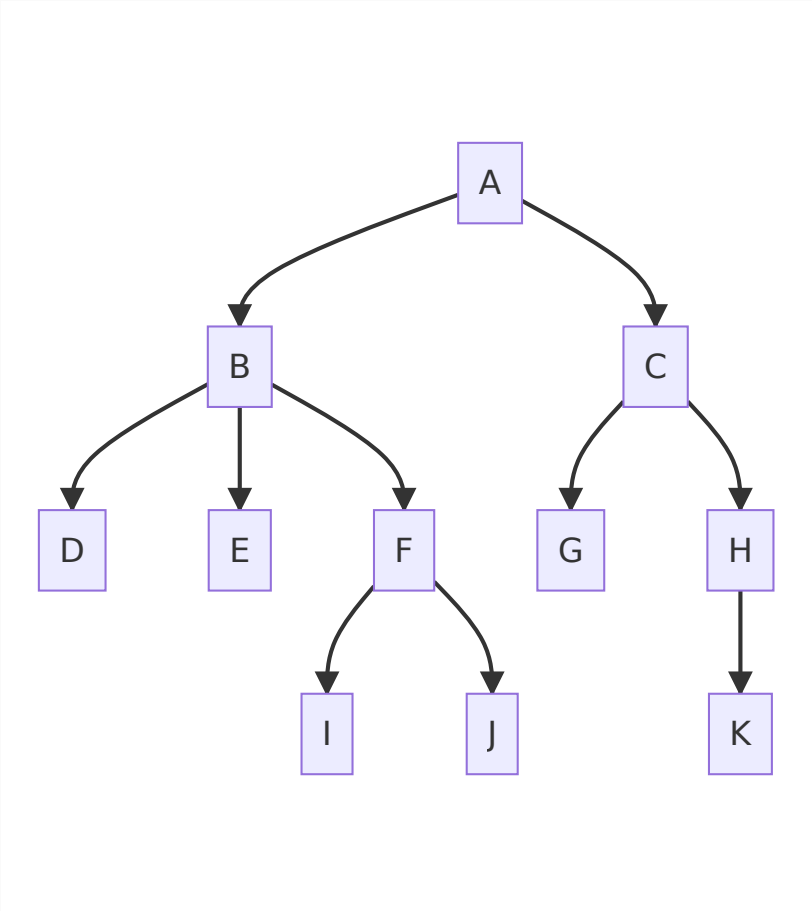
Autres représentation

- Botanique
- **Exercice:** Ajouter les degrés/niveaux et feuilles



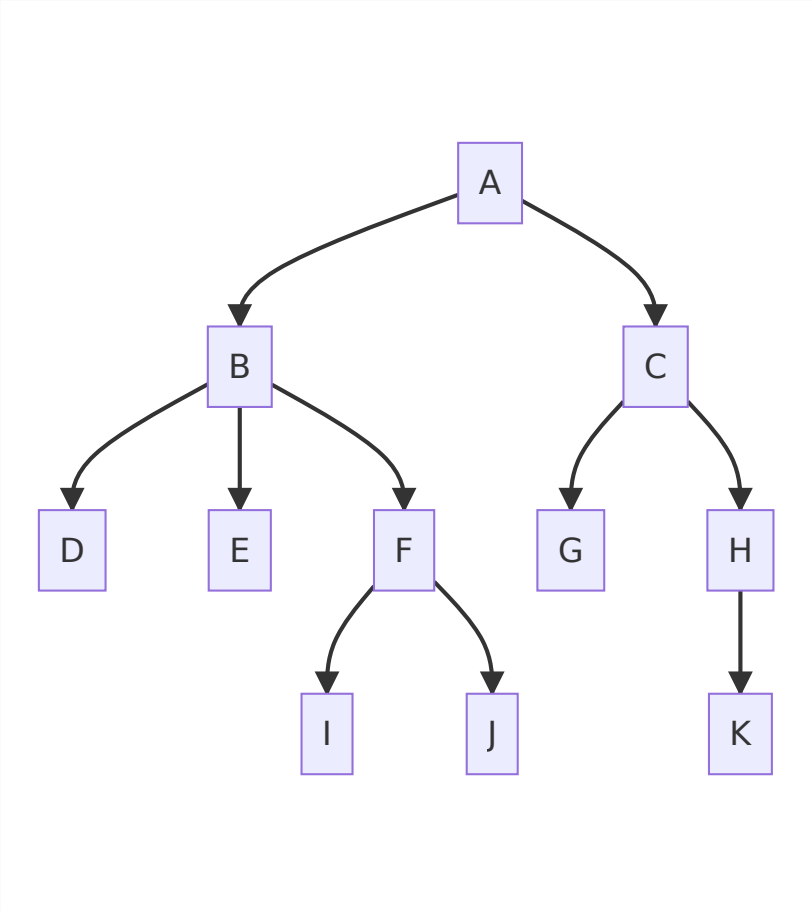
Autres représentation

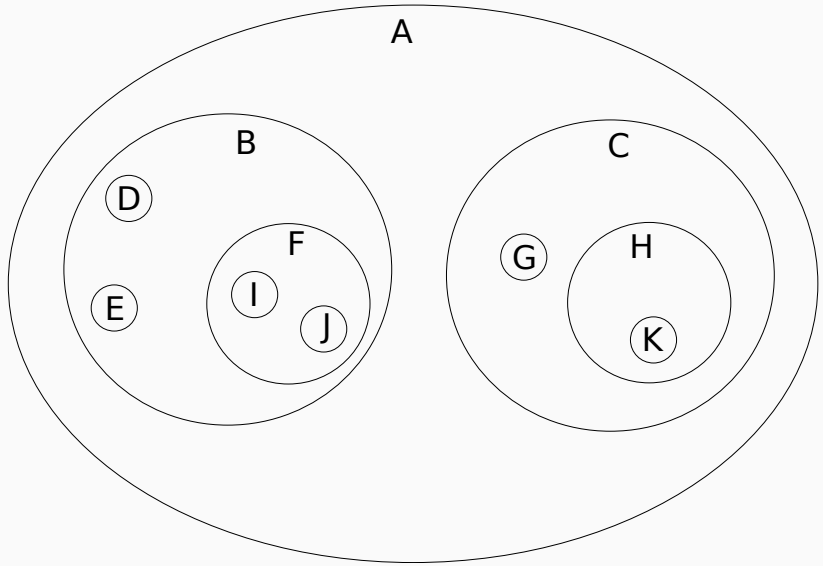
- Ensembliste



Autres représentation

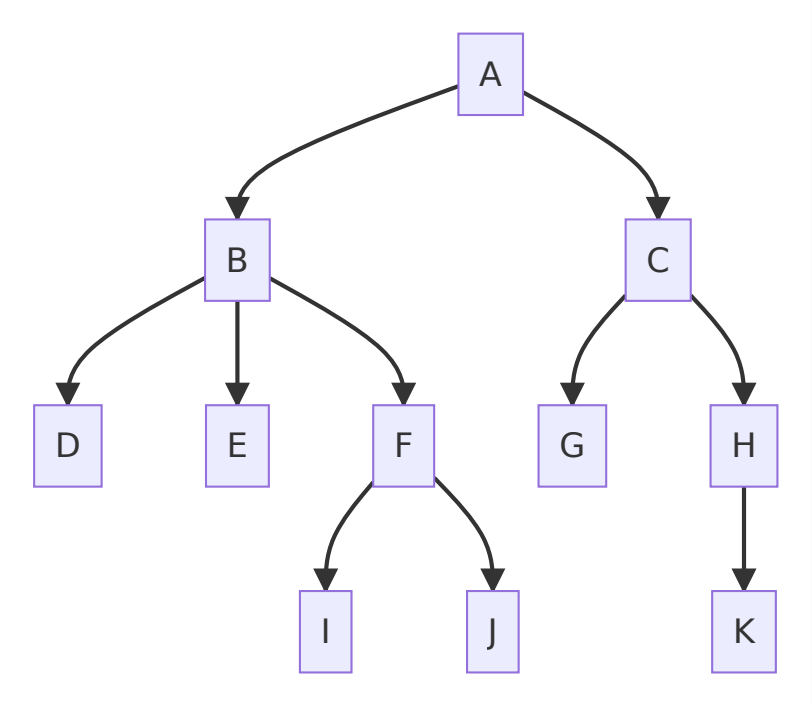
- Ensembliste





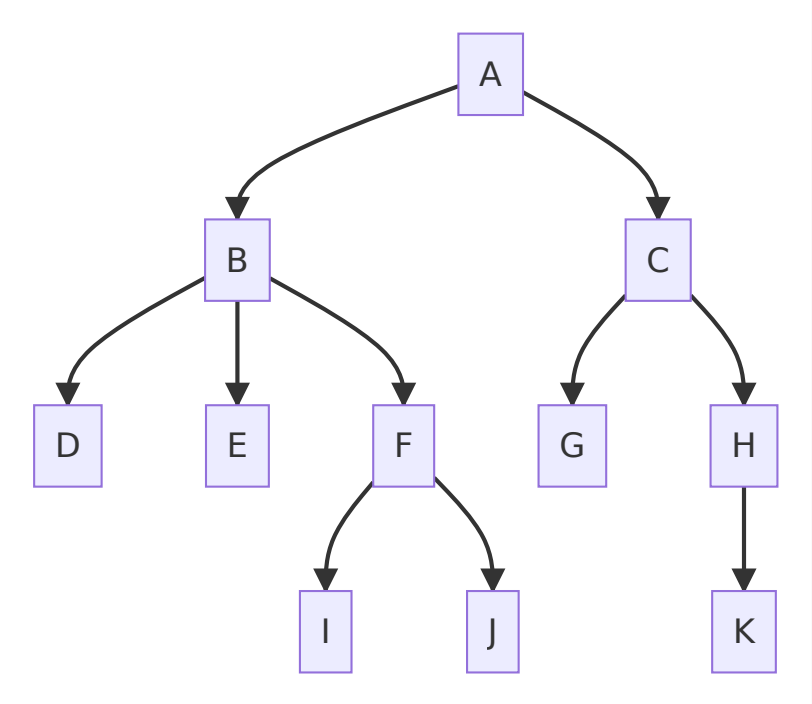
Autres représentation

- Liste



Autres représentation

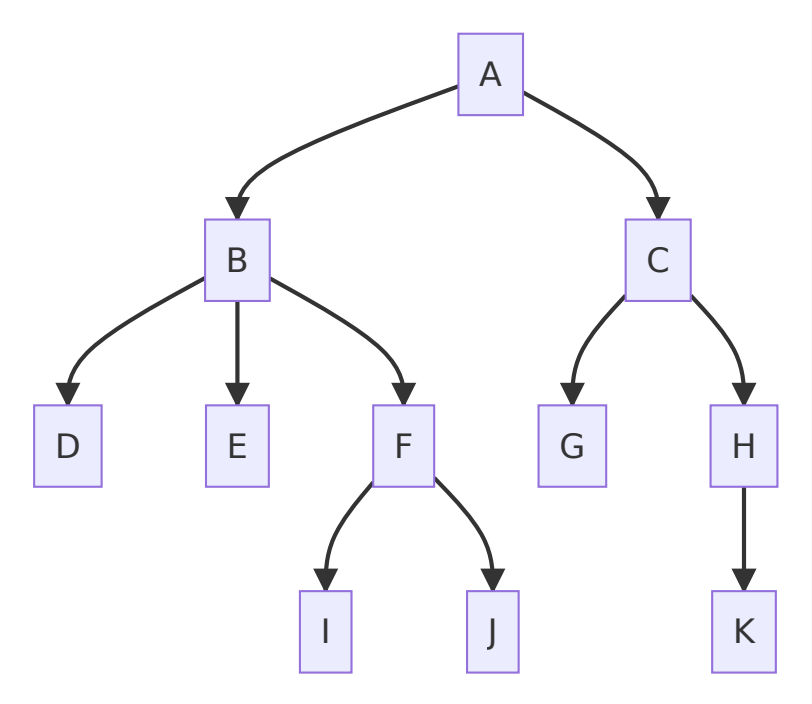
- Liste




```
(A
    (B
        (D)
        (E)
        (F
            (I)
            (J)
        )
    )
    (C
        (G)
        (H
            (K)
        )
    )
)
```

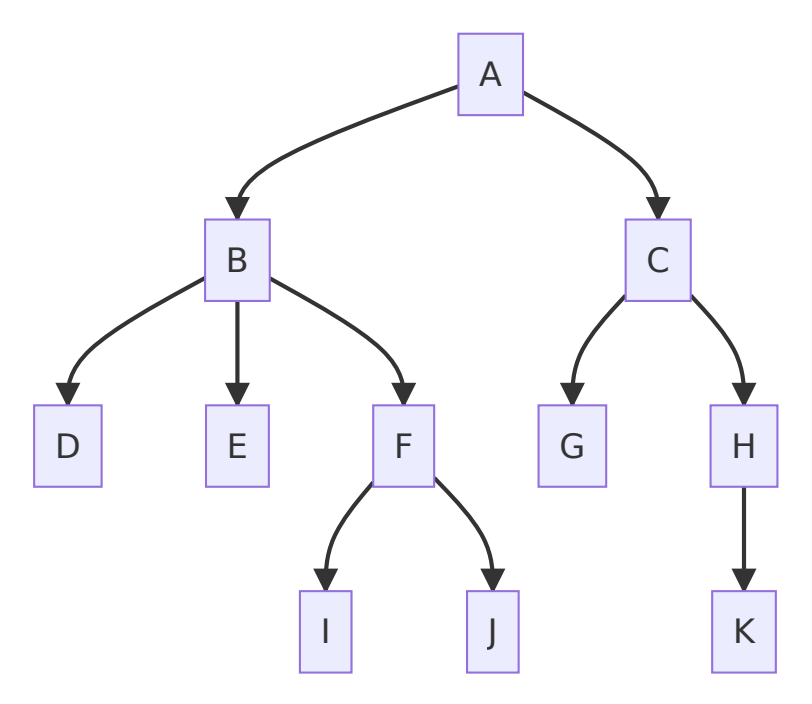
Autres représentation

- Par niveau



Autres représentation

- Par niveau




```
1          2          3          4
----------------------------------
A
           B
                      D
                      E
                      F
                                 I
                                 J
           C
                      G
                      H
                                 K
```

L'arbre binaire

- Structure de données abstraite,
- Chaque nœud a au plus deux enfants: gauche et droite,
- Chaque enfants est un arbre.

Comment représenteriez vous une telle structure?

L'arbre binaire

- Structure de données abstraite,
- Chaque nœud a au plus deux enfants: gauche et droite,
- Chaque enfants est un arbre.

Comment représenteriez vous une telle structure?

```
<R, G, D>
    R: racine
    G: sous-arbre gauche
    D: sous-arbre droite
```

Comment cela s'écrirait en C?

L'arbre binaire

- Structure de données abstraite,
- Chaque nœud a au plus deux enfants: gauche et droite,
- Chaque enfants est un arbre.

Comment représenteriez vous une telle structure?

```
<R, G, D>
    R: racine
    G: sous-arbre gauche
    D: sous-arbre droite
```

Comment cela s'écrirait en C?

```c
typedef struct _node {
    contenu info;
    struct _node *left, *right;
} node;
typedef node *tree;
```

L'arbre binaire

Que se passerait-il avec

```
typedef struct _node {
    int info;
    struct _node left, right;
} node;
```

- On ne sait pas quelle est la taille de node, on ne peut pas l'allouer!

Interface minimale

- Qu'y mettriez vous?

L'arbre binaire

Que se passerait-il avec

```
typedef struct _node {
    int info;
    struct _node left, right;
} node;
```

- On ne sait pas quelle est la taille de node, on ne peut pas l'allouer!

Interface minimale

- Qu'y mettriez vous?

```
NULL                -> arbre (vide)
<n, arbre, arbre>   -> arbre
visiter(arbre)      -> nœud (la racine de l'arbre)
gauche(arbre)       -> arbre (sous-arbre de gauche)
droite(arbre)       -> arbre (sous-arbre de droite)
```

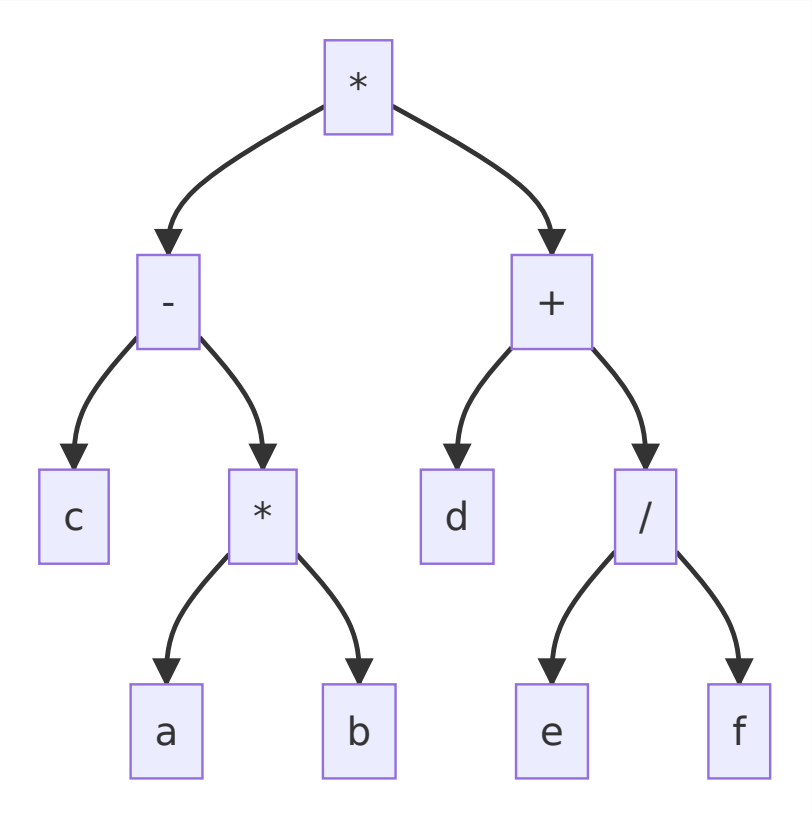
- Les autres opérations (insertion, parcours, etc) dépendent de ce qu'on stocke dans l'arbre.

Exemple d'arbre binaire

- Représentez `(c - a * b) * (d + e / f)` à l'aide d'un arbre binaire (matrix)

Exemple d'arbre binaire

- Représentez `(c - a * b) * (d + e / f)` à l'aide d'un arbre binaire (matrix)



Remarques

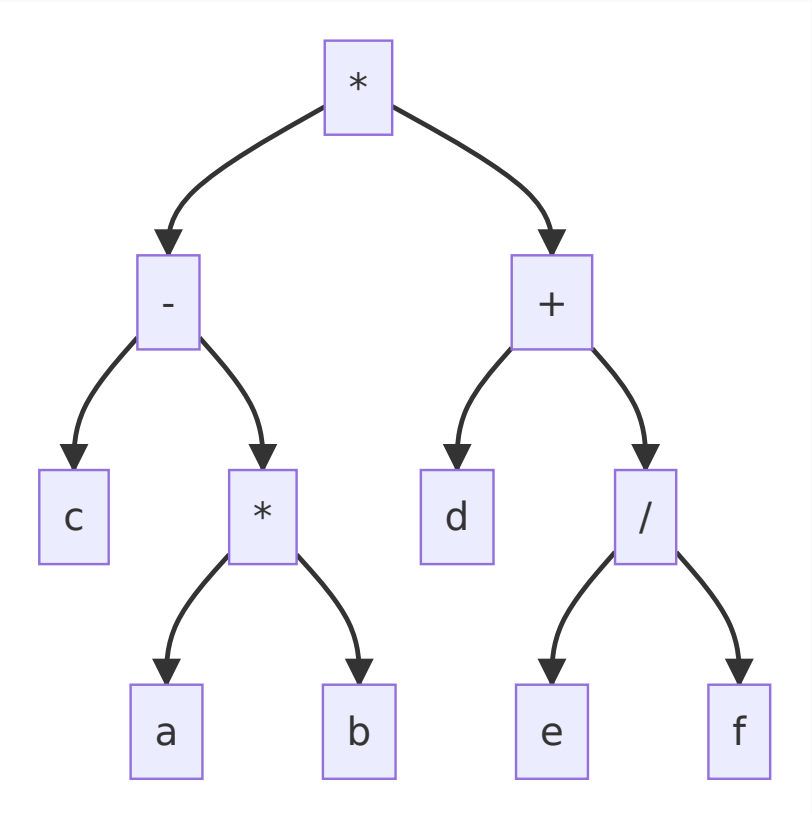
- L'arbre est **hétérogène**: le genre d'info est pas le même sur chaque nœud (opérateur, opérande).
  - Les feuilles contiennent les opérandes.
  - Les nœuds internes contiennent les opérateurs.

Parcours d'arbres binaires

- Appliquer une opération à tous les nœuds de l'arbre,
- Nécessité de **parcourir** l'arbre,
- Utiliser uniquement l'interface: visiter, gauche, droite.

Une idée de comment parcourir cet arbre?

- 3 parcours (R: Racine, G: sous-arbre gauche, D: sous-arbre droit):



1. Parcours **préfixe** (R, G, D),
2. Parcours **infixe** (G, R, D),
3. Parcours **postfixe** (G, D, R).

Le parcours infixe (G, R, D)

- Gauche, Racine, Droite:
  1. On descend dans l'arbre de gauche tant qu'il est pas vide,
  2. On visite la racine du sous arbre,
  3. On descend dans le sous-arbre de droite (s'il est pas vide),
  4. On recommence.

Le parcours infixe (G, R, D)

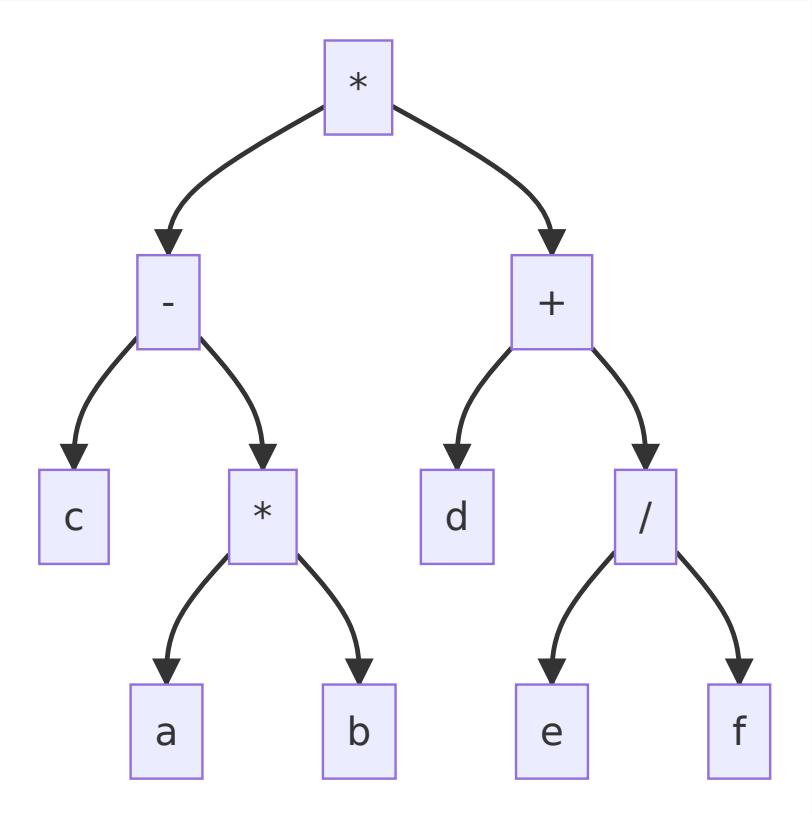
- Gauche, Racine, Droite:
  1. On descend dans l'arbre de gauche tant qu'il est pas vide,
  2. On visite la racine du sous arbre,
  3. On descend dans le sous-arbre de droite (s'il est pas vide),
  4. On recommence.

Incompréhensible?

- La récursivité c'est la vie.

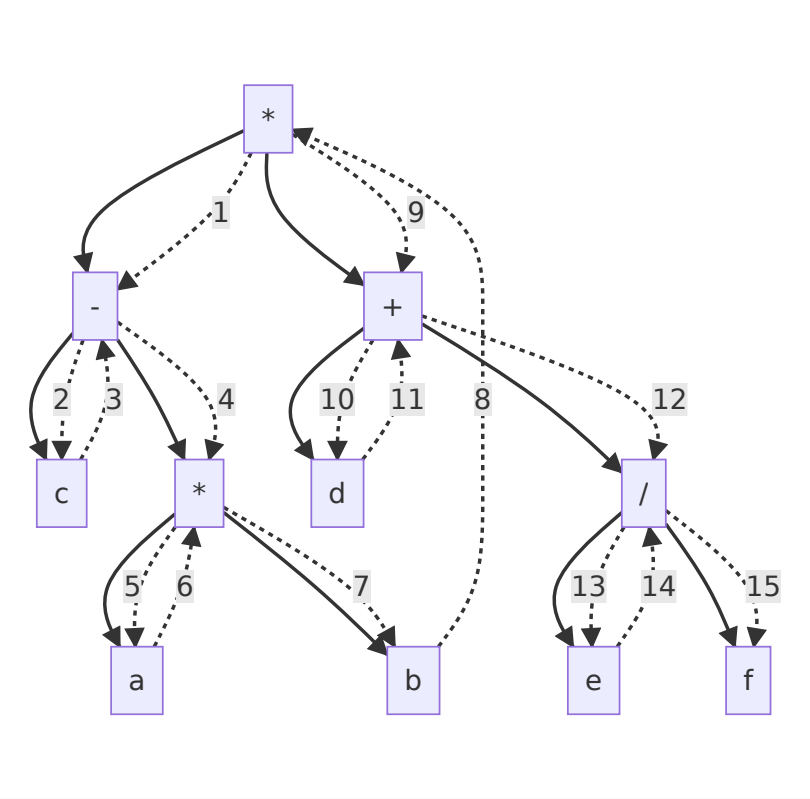
```
parcours_infixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_infixe(gauche(a))
    visiter(A)
    si est_pas_vide(droite(A))
       parcours_infixe(droite(A))
```

Graphiquement (dessinons)




```
parcours_infixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_infixe(gauche(a))
    visiter(A)
    si est_pas_vide(droite(A))
       parcours_infixe(droite(A))
```

Graphiquement (`mermaid` c'est super)




```
parcours_infixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_infixe(gauche(a))
    visiter(A)
    si est_pas_vide(droite(A))
       parcours_infixe(droite(A))
```

Remarque

Le nœud est visité à la **remontée**.

Résultat

```
c - a * b * d + e / f
```

Et en C?

Live code

Et en C?

Live code

```c
typedef int data;
typedef struct _node {
    data info;
    struct _node* left;
    struct _node* right;
} node;
typedef node* tree_t;
void tree_print(tree_t tree, int n) {
    if (NULL != tree) {
        tree_print(tree->left, n+1);
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            printf(" ");
        }
        printf("%d\n", tree->info);
        tree_print(tree->right, n+1);
    }
}
```

Question

Avez-vous compris le fonctionnement?

Question

Avez-vous compris le fonctionnement?

Vous en êtes sûr · e · s?

Question

Avez-vous compris le fonctionnement?

Vous en êtes sûr · e · s?

OK, alors deux exercices:

1. Écrire le pseudo-code pour le parcours R, G, D (matrix).
2. Écrire le pseudo-code pour la parcours G, D, R (matrix),

Rappel

```
parcours_infixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_infixe(gauche(a))
    visiter(A)
    si est_pas_vide(droite(A))
       parcours_infixe(droite(A))
```

Correction

- Les deux parcours sont des modifications **triviales**[2] de l'algorithme infixe.

Le parcours postfixe

```
parcours_postfixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_postfixe(gauche(a))
    si est_pas_vide(droite(a))
       parcours_postfixe(droite(a))
    visiter(a)
```

Le parcours préfixe

```
parcours_préfixe(arbre a)
    visiter(a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
        parcours_préfixe(gauche(a))
    si est_pas_vide(droite(a))
        parcours_préfixe(droite(a))
```

[2] Copyright cours de mathématiques pendant trop d'années.

Correction

- Les deux parcours sont des modifications **triviales**[2] de l'algorithme infixe.

Le parcours postfixe

```
parcours_postfixe(arbre a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
       parcours_postfixe(gauche(a))
    si est_pas_vide(droite(a))
       parcours_postfixe(droite(a))
    visiter(a)
```

Le parcours préfixe

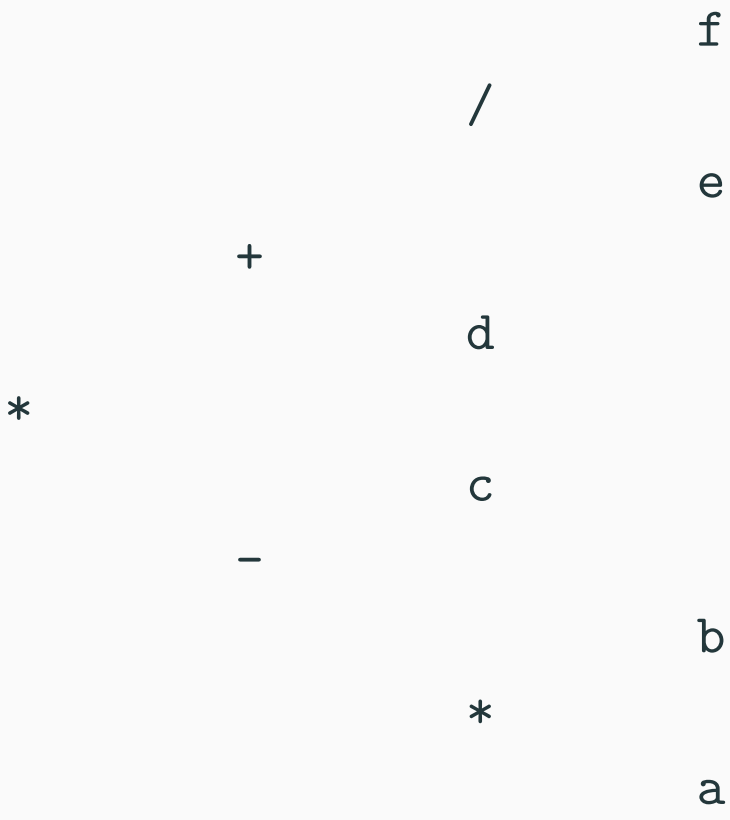
```
parcours_préfixe(arbre a)
    visiter(a)
    si est_pas_vide(gauche(a))
        parcours_préfixe(gauche(a))
    si est_pas_vide(droite(a))
        parcours_préfixe(droite(a))
```

Attention: L'implémentation de ces fonctions en C sont **à faire** en exercice (inspirez vous de ce qu'on a fait avant)!

[2] Copyright cours de mathématiques pendant trop d'années.

Exercice: parcours

Comment imprimer l'arbre ci-dessous?



Exercice: parcours

Comment imprimer l'arbre ci-dessous?

```
                    f
          /
                    e
    +
          d
*
          c
    -
                    b
          *
                    a
```

Bravo vous avez trouvé!

- Il s'agissait du parcours D, R, G.

Implémentation

Vous avez 5 min pour implémenter cette fonction et la poster sur matrix!

Implémentation

Vous avez 5 min pour implémenter cette fonction et la poster sur matrix!

```
void pretty_print(tree_t tree, int n) {
    if (NULL != tree) {
        pretty_print(tree->right, n+1);
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            printf(" ");
        }
        printf("%d\n", tree->info);
        pretty_print(tree->left, n+1);
    }
}
```

Exercice supplémentaire (sans corrigé)

Écrire le code de la fonction

```
int depth(tree_t t);
```

qui retourne la profondeur maximale d'un arbre.

Indice: la profondeur à chaque niveau peut-être calculée à partir du niveau des sous-arbres de gauche et de droite.

La recherche dans un arbre binaire

- Les arbres binaires peuvent retrouver une information très rapidement.
- À quelle complexité? À quelle condition?

La recherche dans un arbre binaire

- Les arbres binaires peuvent retrouver une information très rapidement.
- À quelle complexité? À quelle condition?

Condition

- Le contenu de l'arbre est **ordonné** (il y a une relation d'ordre (<, >) entre les éléments).

Complexité

- La profondeur de l'arbre (ou le $\mathcal{O}(\log_2(N))$)

La recherche dans un arbre binaire

- Les arbres binaires peuvent retrouver une information très rapidement.
- À quelle complexité? À quelle condition?

Condition

- Le contenu de l'arbre est **ordonné** (il y a une relation d'ordre (<, >) entre les éléments).

Complexité

- La profondeur de l'arbre (ou le $\mathcal{O}(\log_2(N))$)

Exemple: les arbres lexicographiques

- Chaque nœud contient une information de type ordonné, la **clé**,
- Par construction, pour chaque nœud N:
  - Toutes clé du sous-arbre à gauche de N sont inférieurs à la clé de N.
  - Toutes clé du sous-arbre à droite de N sont inférieurs à la clé de N.

Algorithme de recherche

- Retourner le nœud si la clé est trouvée dans l'arbre.

```
arbre recherche(clé, arbre)
    tante_que est_non_vide(arbre)
        si clé < clé(arbre)
            arbre = gauche(arbre)
        sinon si clé > clé(arbre)
            arbre = droite(arbre)
        sinon
            retourne arbre
    retourne NULL
```

Algorithme de recherche, implémentation (live)

Algorithme de recherche, implémentation (live)

```c
typedef int key_t;
typedef struct _node {
    key_t key;
    struct _node* left;
    struct _node* right;
} node;
typedef node* tree_t;
tree_t search(key_t key, tree_t tree) {
    tree_t current = tree;
    while (NULL != current) {
        if (current->key > X) {
            current = current->gauche;
        } else if (current->key < X){
            current = current->droite;
        } else {
            return current;
        }
    }
    return NULL;
}
```

Exercice (5-10min)

Écrire le code de la fonction

```
int tree_size(tree_t tree);
```

qui retourne le nombre total de nœuds d'un arbre et poster le résultat sur matrix.

Indication: la taille, est 1 + le nombre de nœuds du sous-arbre de gauche additionné au nombre de nœuds dans le sous-arbre de droite.

Exercice (5-10min)

Écrire le code de la fonction

```
int tree_size(tree_t tree);
```

qui retourne le nombre total de nœuds d'un arbre et poster le résultat sur matrix.

Indication: la taille, est 1 + le nombre de nœuds du sous-arbre de gauche additionné au nombre de nœuds dans le sous-arbre de droite.

```
int arbre_size(tree_t tree) {
    if (NULL == tree) {
        return 0;
    } else {
        return 1 + tree_size(tree->left)
            + tree_size(tree->right);
    }
}
```

L'insertion dans un arbre binaire

- C'est bien joli de pouvoir faire des parcours, recherches, mais si on peut pas construire l'arbre....

Pour un arbre lexicographique

- Rechercher la position dans l'arbre où insérer.
- Créer un nœud avec la clé et le rattacher à l'arbre.

Exemple d'insertions

- Clés uniques pour simplifier.
- Insertion de 5, 15, 10, 25, 2, -5, 12, 14, 11.
- Rappel:
  - Plus petit que la clé courante => gauche,
  - Plus grand que la clé courante => droite.
- Faisons le dessins ensemble

Exercice (3min, puis matrix)

- Dessiner l'arbre en insérant 20, 30, 60, 40, 10, 15, 25, -5

Pseudo-code d'insertion (1/2)

- Deux parties:
  - Recherche le parent où se passe l'insertion.
  - Ajout de l'enfant dans l'arbre.

Recherche du parent

```
arbre position(arbre, clé)
    si est_non_vide(arbre)
        si clé < clé(arbre)
            suivant = gauche(arbre)
        sinon
            suivant = droite(arbre)
        tant que clé(arbre) != clé && est_non_vide(suivant)
            arbre = suivant
            si clé < clé(arbre)
                suivant = gauche(arbre)
            sinon
                suivant = droite(arbre)
```

Pseudo-code d'insertion (2/2)

- Deux parties:
  - Recherche de la position.
  - Ajout dans l'arbre.

Ajout de l'enfant

```
ajout(arbre, clé)
    si est_vide(arbre)
        arbre = nœud(clé)
    sinon
        si clé < clé(arbre)
            gauche(arbre) = nœud(clé)
        sinon si clé > clé(arbre)
            droite(arbre) = nœud(clé)
        sinon
            retourne
```

Code d'insertion en C

Recherche du parent (ensemble)

Code d'insertion en C

Recherche du parent (ensemble)

```
tree_t position(tree_t tree, key_t key) {
    tree_t current = tree;
    if (NULL != current) {
        tree_t subtree = key > current->key ? current->right :
        current->left;
        while (key != current->key && NULL != subtree) {
            current = subtree;
            subtree = key > current->key ? current->right :
            current->left;
        }
    }
    return current;
}
```