Les B-arbres

Algorithmique et structures de données, 2024-2025

P. Albuquerque (B410) et O. Malaspinas (A401), ISC, HEPIA

2025-04-11

En partie inspirés des supports de cours de P. Albuquerque

Les B-arbres

Les B-arbres

Problématique

- Grands jeux de données (en 1970).
- Stockage dans un arbre, mais l'arbre ne tient pas en mémoire.
- Regrouper les sous-arbres en **pages** qui tiennent en mémoire.

Exemple

- 100 nœuds par page et l'arbre comporte 10^6 nœuds:
  - Recherche B-arbre: $\log_{100}(10^6) = 3$;
  - Recherche ABR: $\log_2(10^6) = 20$.
- Si on doit lire depuis le disque: 10ms par recherche+lecture:
  - 30ms (lecture beaucoup plus rapide que recherche) vs $200\text{ms} = 0.2\text{s}$.

Remarques

- On ne sait pas ce que veut dire B: Bayer, Boeing, Balanced?
- Variante plus récente B+-arbres.

Illustration, arbre divisé en pages de 3 nœuds

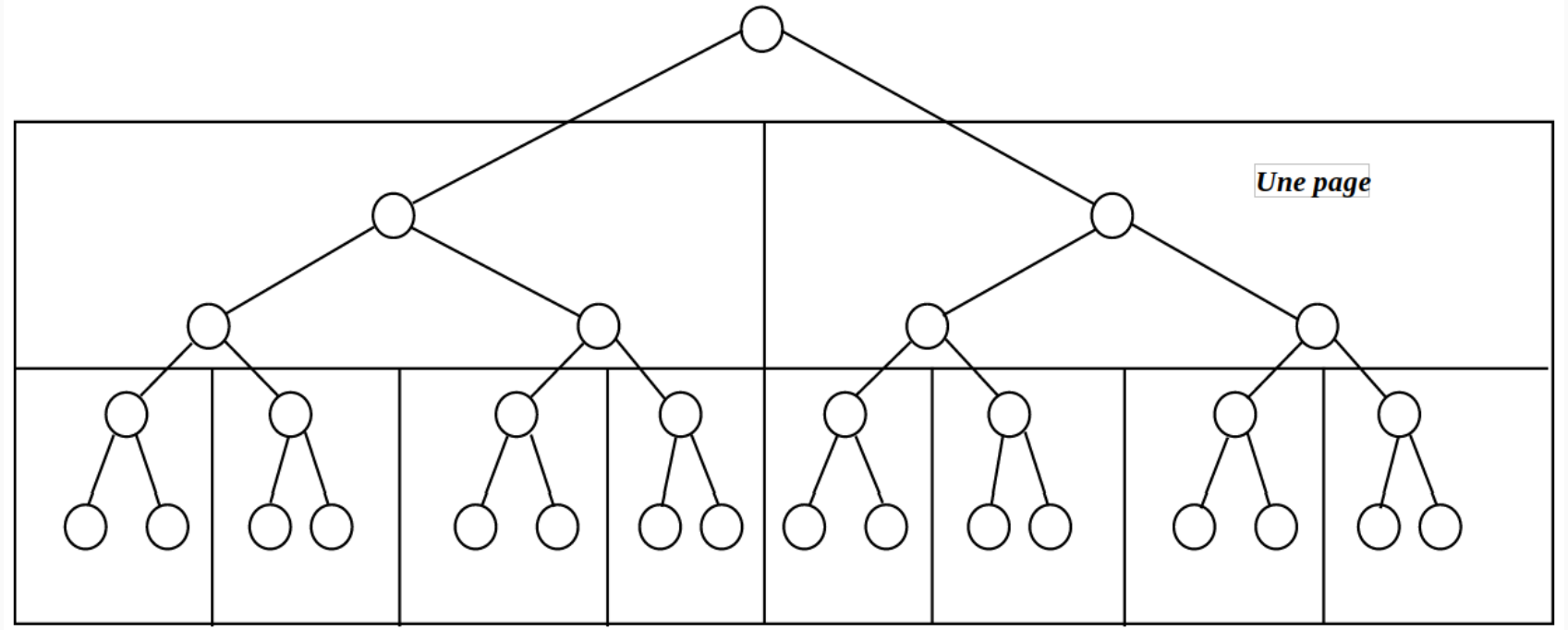


Figure 1: Arbre divisé en pages de 3 nœuds

Les B-arbres

Illustration, arbre divisé en pages de 3 nœuds

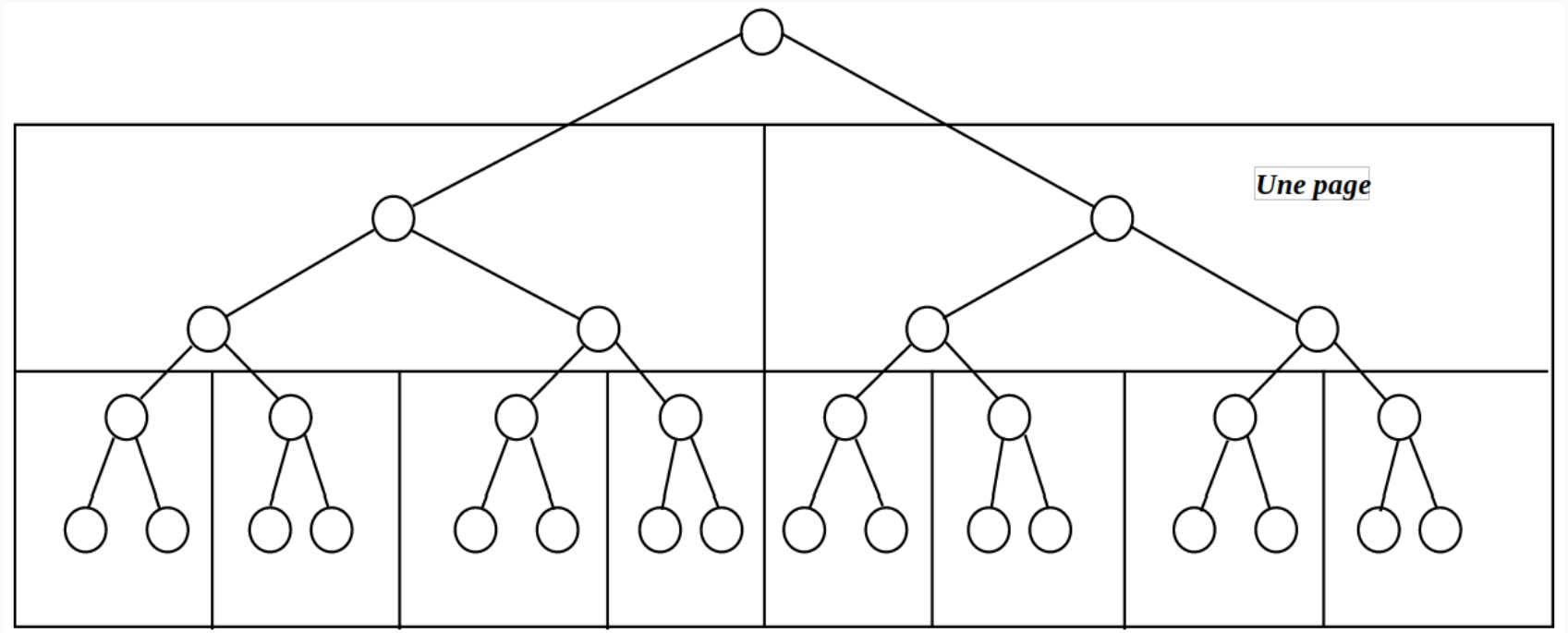


Figure 1: Arbre divisé en pages de 3 nœuds

Utilisation

- Bases de données (souvent très grandes donc sur le disque);
- Systèmes de fichiers.

Les B-arbres

Avantages

- Arbres moins profonds;
- Diminution des opérations de rééquilibrage;
- Complexité toujours en $\log(N)$;

Les B-arbres

Avantages

- Arbres moins profonds;
- Diminution des opérations de rééquilibrage;
- Complexité toujours en $\log(N)$;

Définition: B-arbre d'ordre n

- Chaque page d'un arbre contient au plus $2 \cdot n$ *clés*;
- Chaque page (excepté la racine) contient au moins n clés;
- Chaque page qui contient m clés contient soit:
  - 0 descendants;
  - $m + 1$ descendants.
- Toutes les pages terminales apparaissent au même niveau.

Les B-arbres

Est-ce un B-arbre?

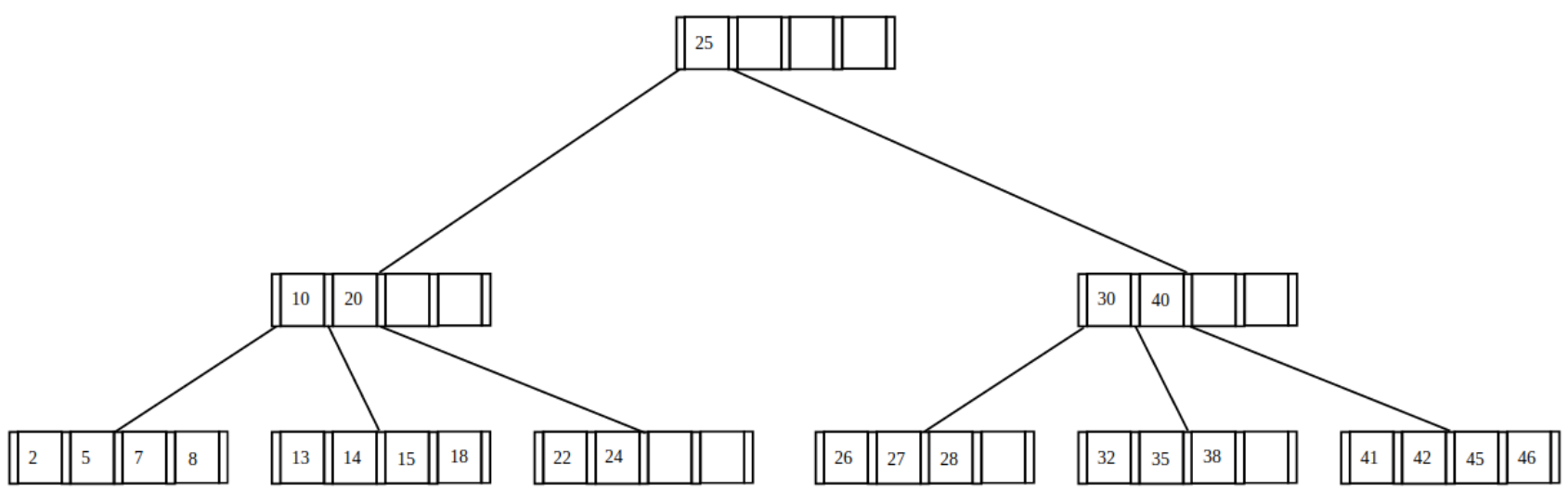


Figure 2: B-arbre d'ordre 2.

Les B-arbres

Est-ce un B-arbre?

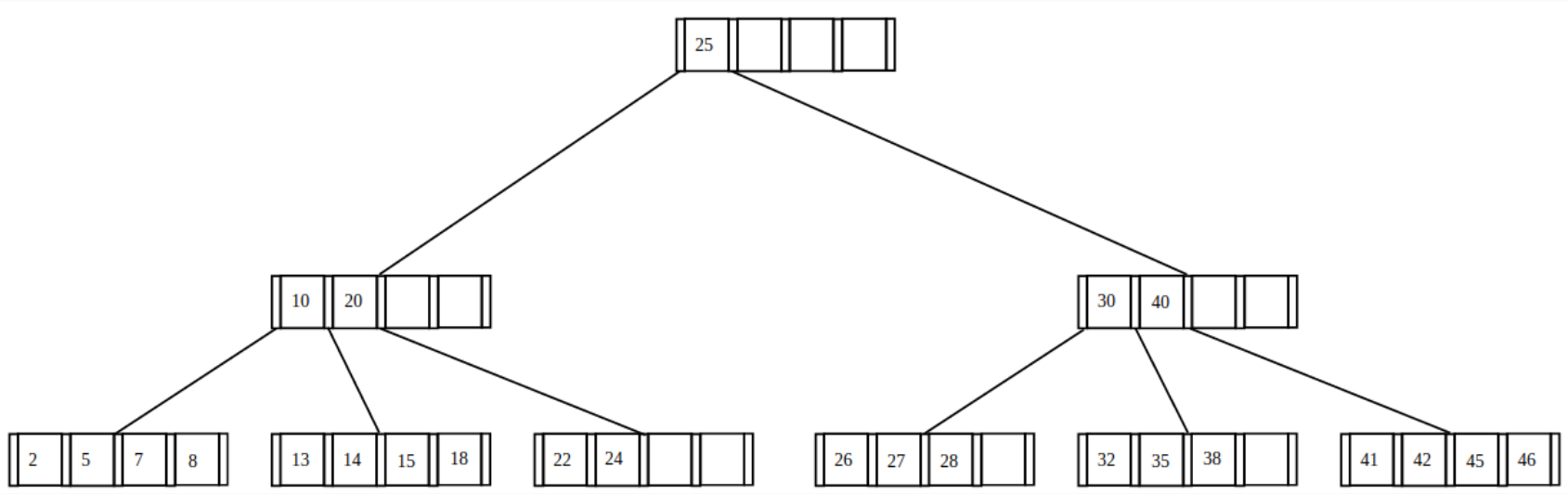


Figure 2: B-arbre d'ordre 2.

Oui!

- Dans chaque nœud les clés sont **triées**.
- Chaque page contient au plus n nœuds: check;
- Chaque nœud avec m clés a $m + 1$ descendants;
- Toutes les feuilles apparaissent au même niveau.

Exemple de recherche: trouver 32

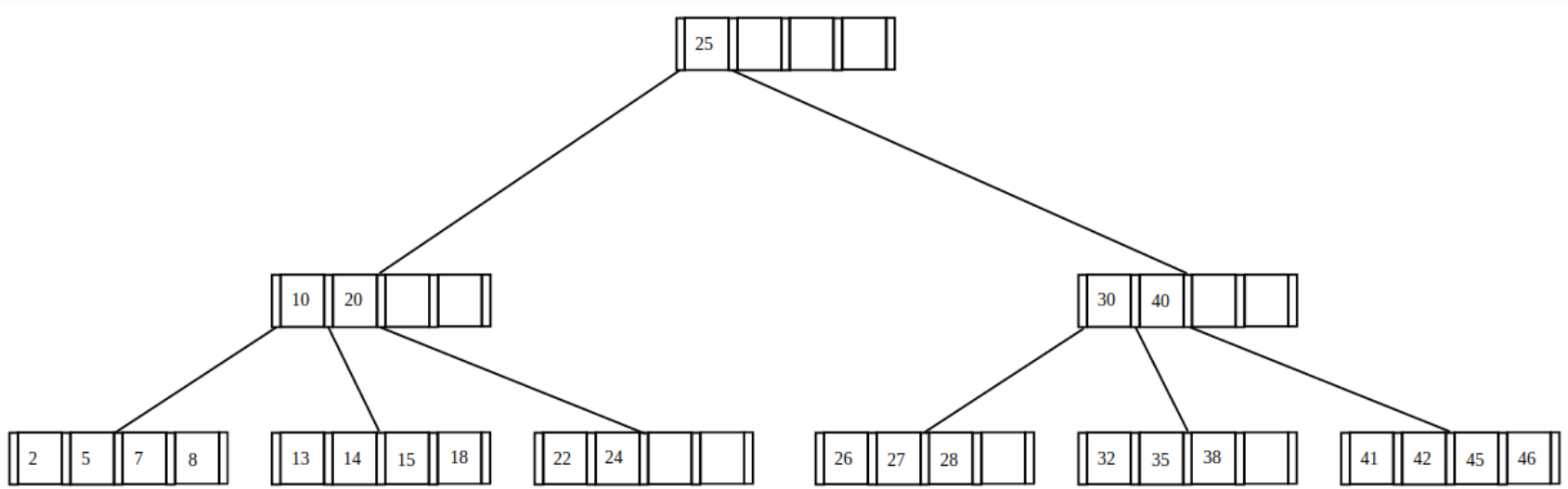


Figure 3: B-arbre d'ordre 2.

Les B-arbres

Exemple de recherche: trouver 32

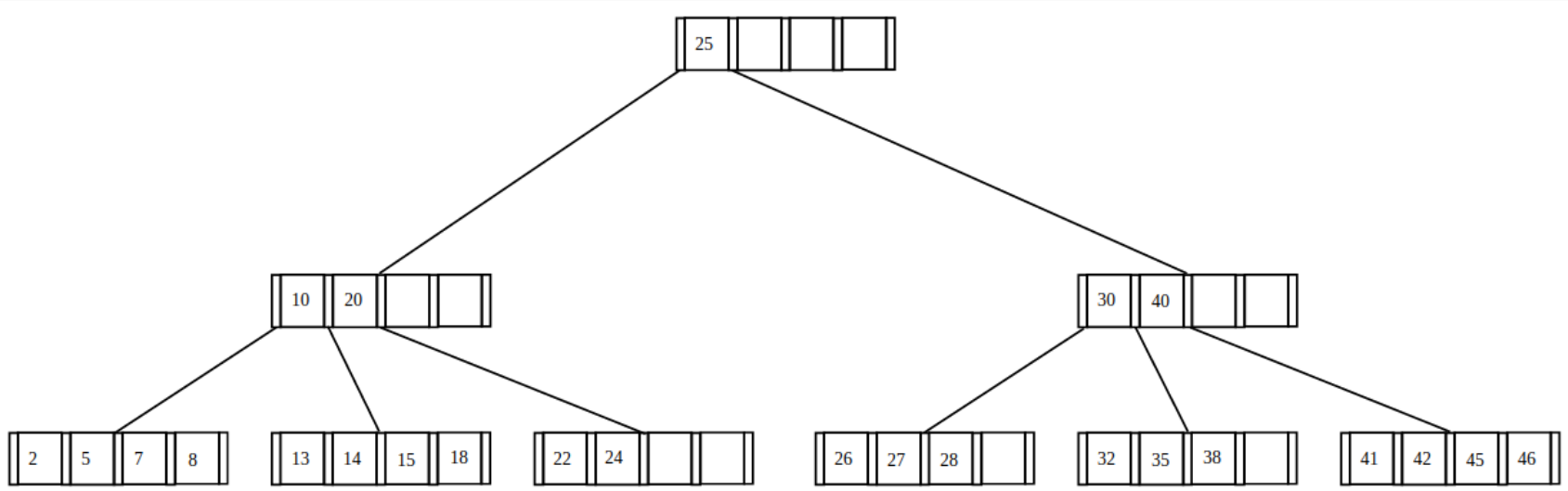


Figure 3: B-arbre d'ordre 2.

- Si `C` plus petit que la 1ère clé ou plus grand que la dernière descendre.
- Sinon parcourir (par bissection ou séquentiellement) jusqu'à trouver où descendre entre 2 éléments.

Les B-arbres

Algorithme de recherche de la clé `C`

0. En partant de la racine.
1. Si on est dans une feuille:
   - Si `C` est dans la page, retourner la page;
   - Sinon c'est perdu.
2. Sinon:
   - Tant que `C < clé(page)` passer à la clé suivante
   - Si `C` est dans la page, retourner la page;
   - Sinon descendre

Les B-arbres

Disclaimer

- Inspiration de https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree

Exemples d'insertion: 1

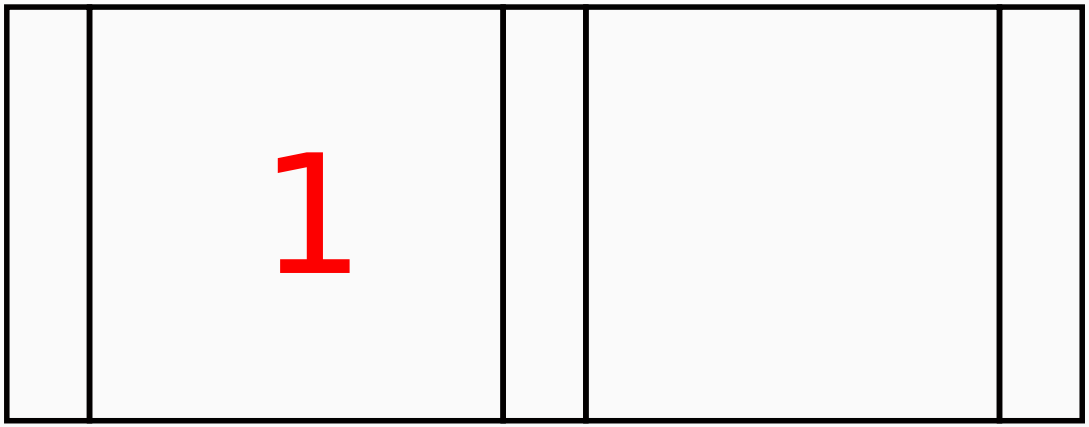


Figure 4: B-arbre d'ordre 1.

Les B-arbres

Disclaimer

- Inspiration de https://en.wikipedia.org/wiki/B-tree

Exemples d'insertion: 1

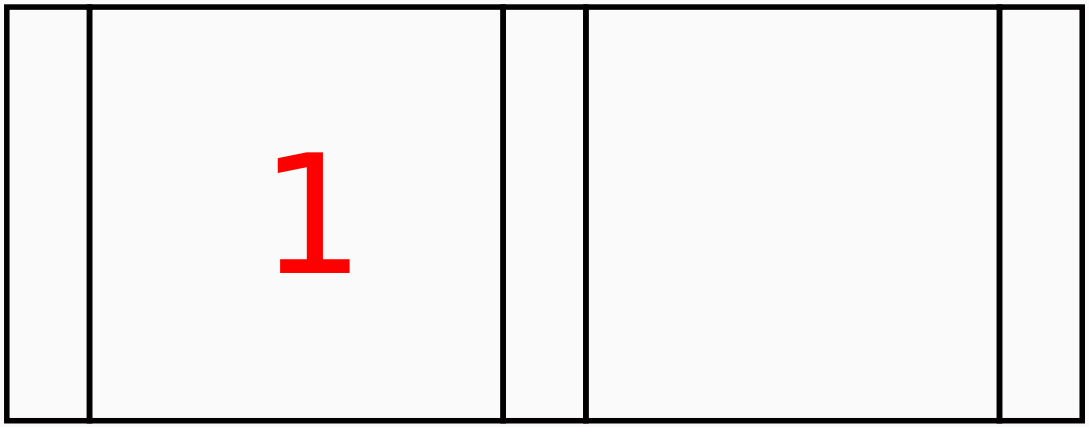


Figure 4: B-arbre d'ordre 1.

- L'arbre est vide, on insère juste dans la première page.

Exemples d'insertion: 2

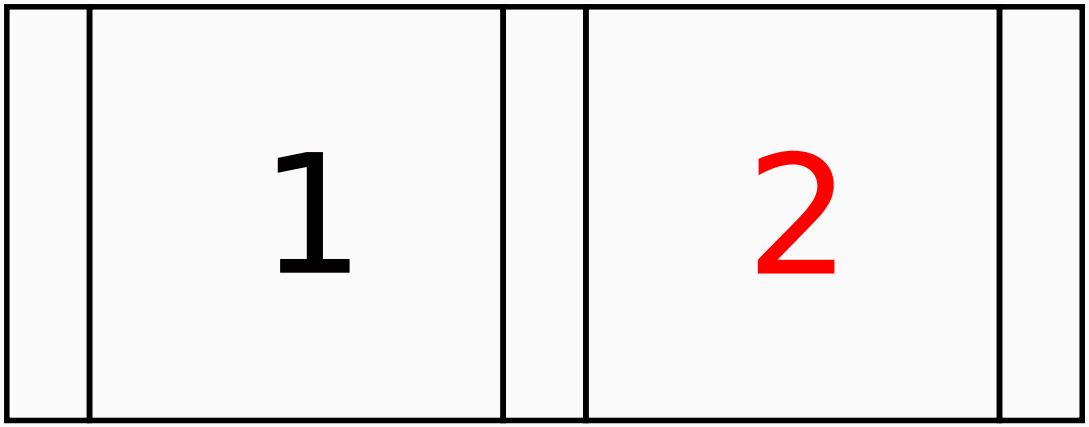


Figure 5: B-arbre d'ordre 1. Nombre pages max = 2.

Exemples d'insertion: 2

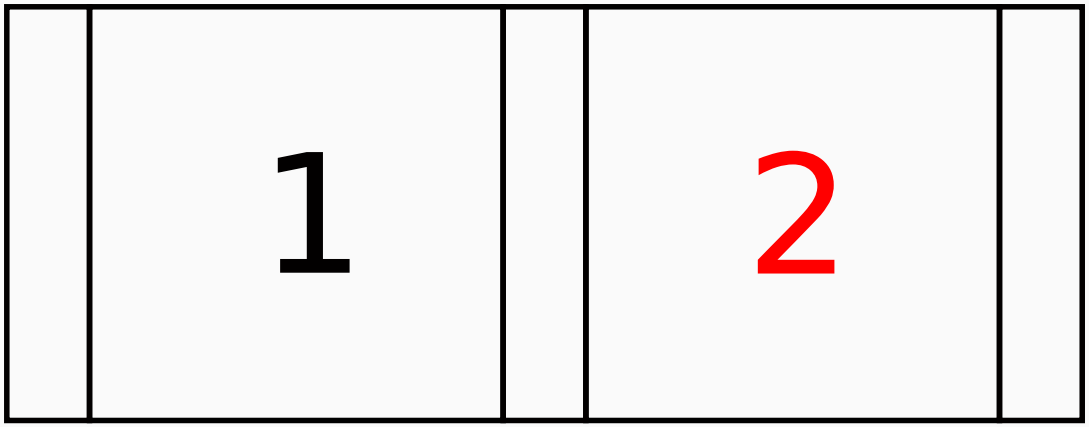


Figure 5: B-arbre d'ordre 1. Nombre pages max = 2.

- La première page n'est pas pleine, on insère dans l'ordre (après 1).

Les B-arbres

Exemples d'insertion: 3

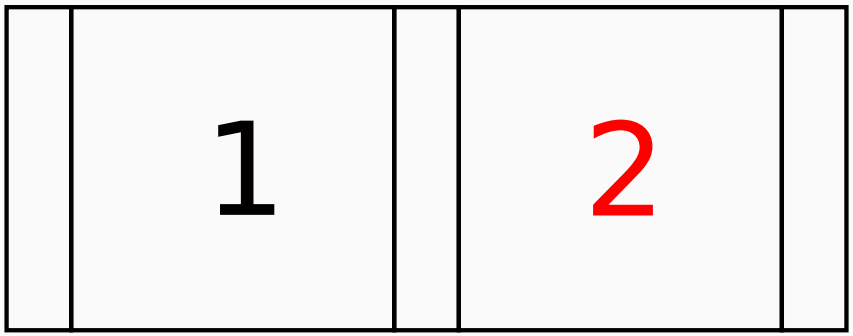


Figure 6: B-arbre d'ordre 1.

- Comment on insère (1min de réflexion avant de donner une réponse!)?

Exemples d'insertion: 3

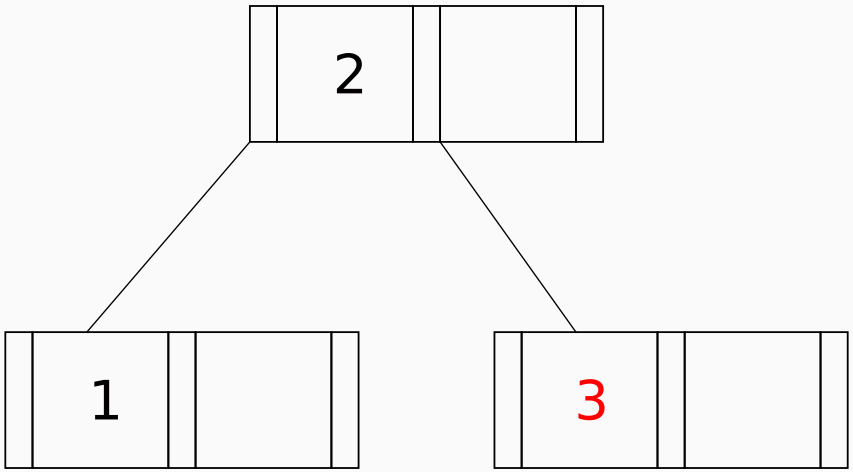


Figure 7: B-arbre d'ordre 1. Nombre pages max = 2.

Exemples d'insertion: 3

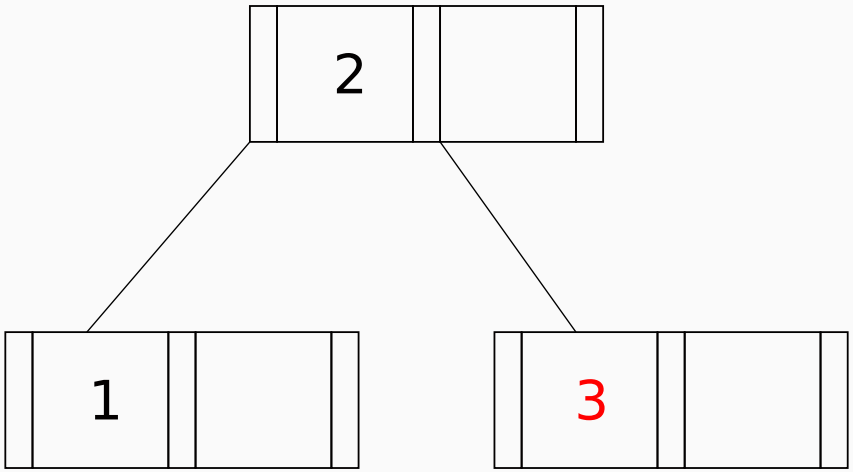


Figure 7: B-arbre d'ordre 1. Nombre pages max = 2.

- La page est pleine, on crée deux enfants.
- On choisit, 2, la médiane de 1, 2, 3 et il est inséré à la racine.
- 1 descend à gauche, 3 descend à droite.

Les B-arbres

Exemples d'insertion: 4

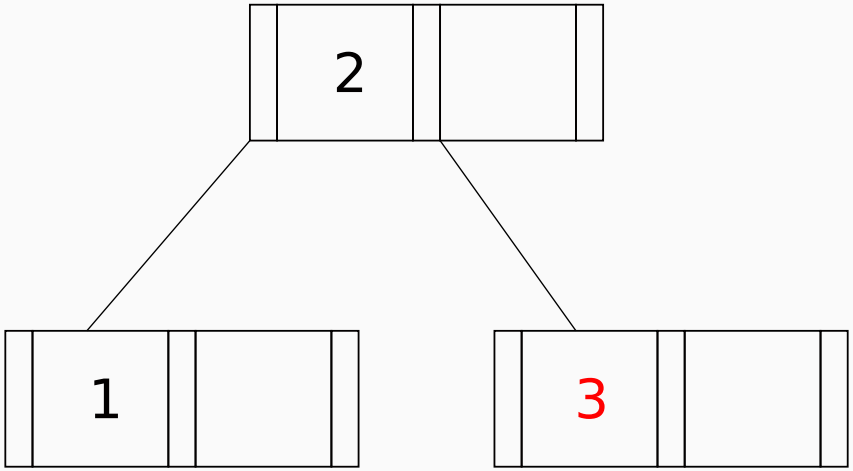


Figure 8: B-arbre d'ordre 1.

- Comment on insère (1min de réflexion avant de donner une réponse!)?

Exemples d'insertion: 4

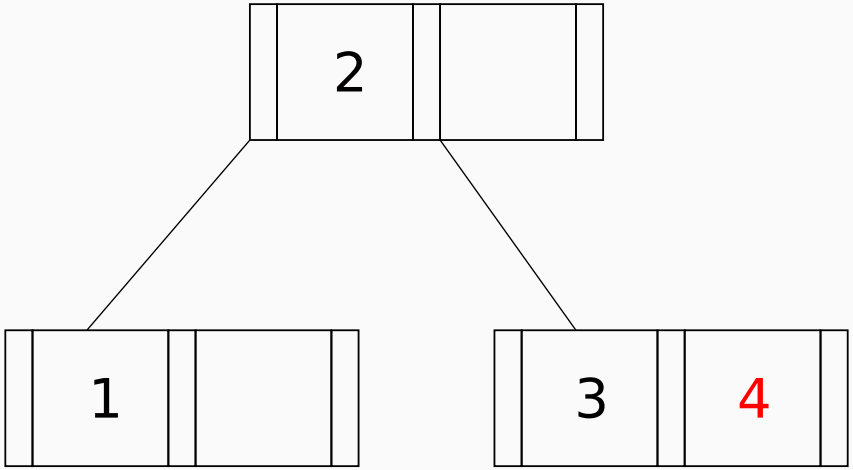


Figure 9: B-arbre d'ordre 1. Nombre enfants 0 ou 2.

Exemples d'insertion: `4`

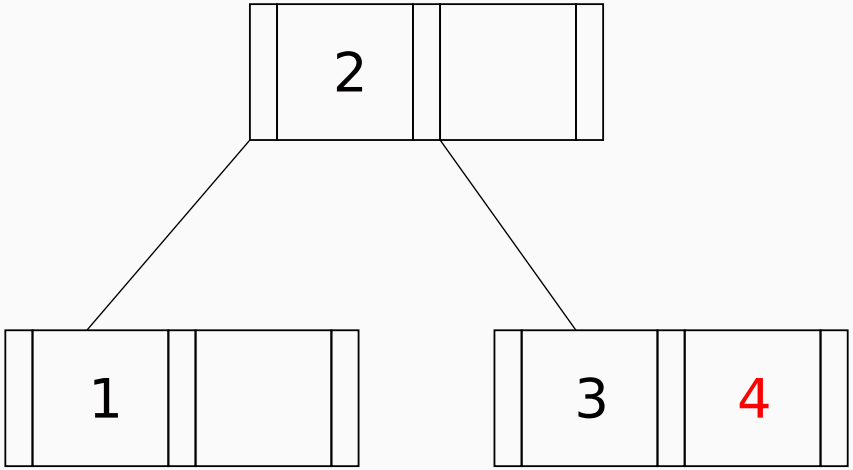


Figure 9: B-arbre d'ordre 1. Nombre enfants 0 ou 2.

- On pourrait insérer à droite de 2, mais... ça ferait 2 parents pour 2 enfants (mais `m` parents $=>$ `m`+1 enfants ou `0`);
- On descend à droite (`4` > `2`);
- On insère à droite de 3.

Les B-arbres

Exemples d'insertion: 5

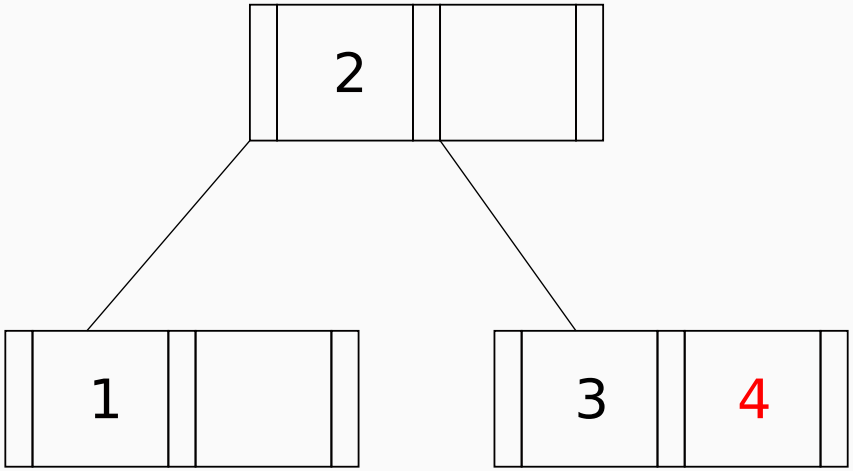


Figure 10: B-arbre d'ordre 1.

- Comment on insère (1min de réflexion avant de donner une réponse!)?

Exemples d'insertion: 5

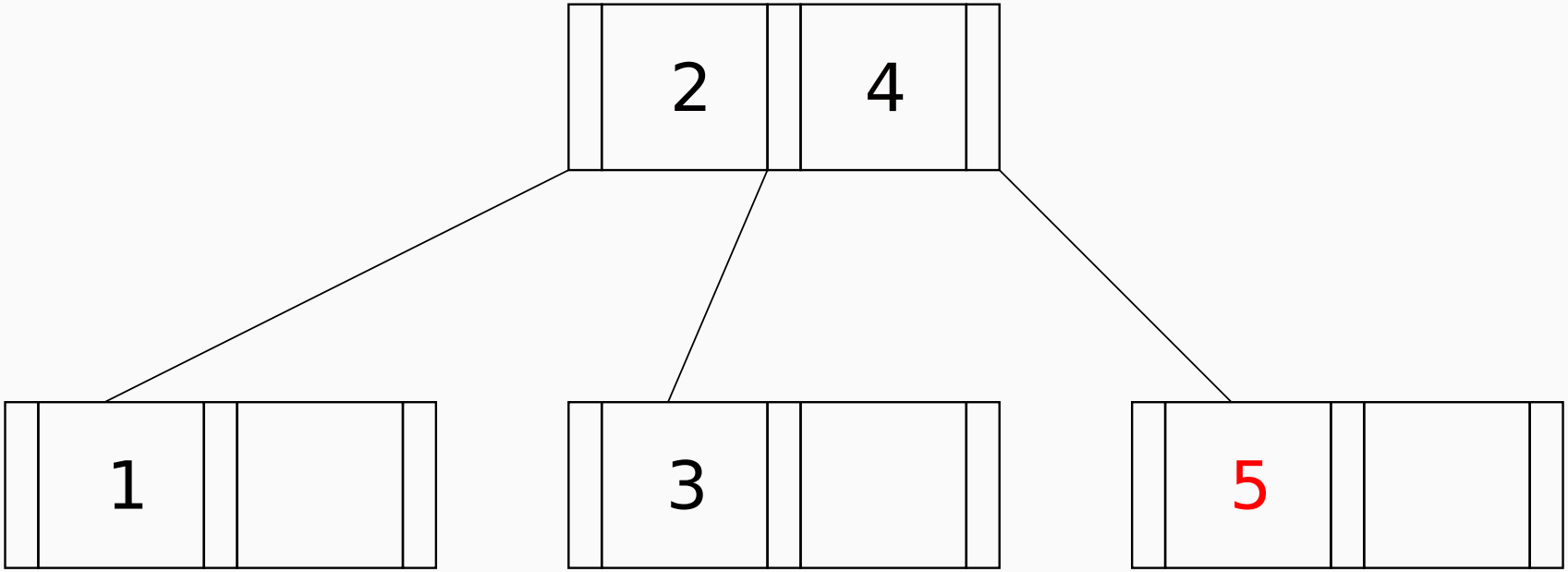


Figure 11: B-arbre d'ordre 1.

Exemples d'insertion: 5

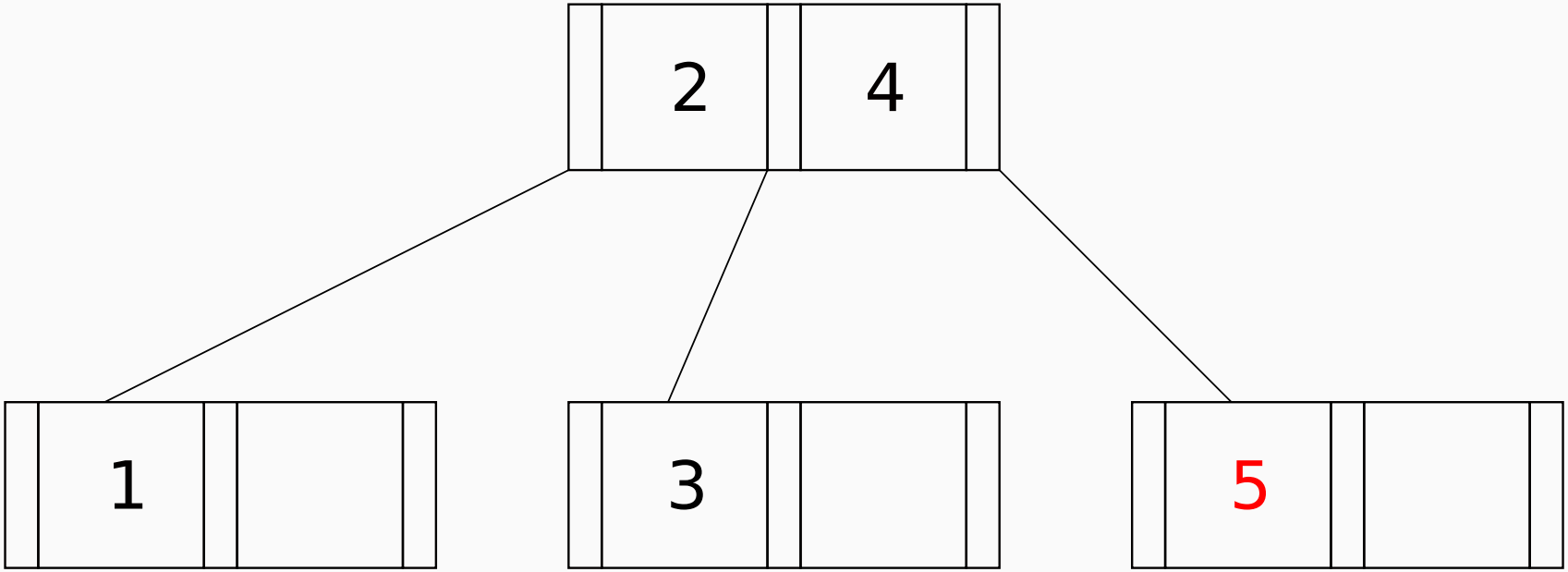


Figure 11: B-arbre d'ordre 1.

- On descend à droite (on ne peut pas insérer à la racine comme pour 4);
- On dépasse la capacité de l'enfant droite;
- 4, médiane de 3, 4, 5, remonte à la racine;
- On crée un nouveau nœud à droite de 4;

Les B-arbres

Exemples d'insertion: 6

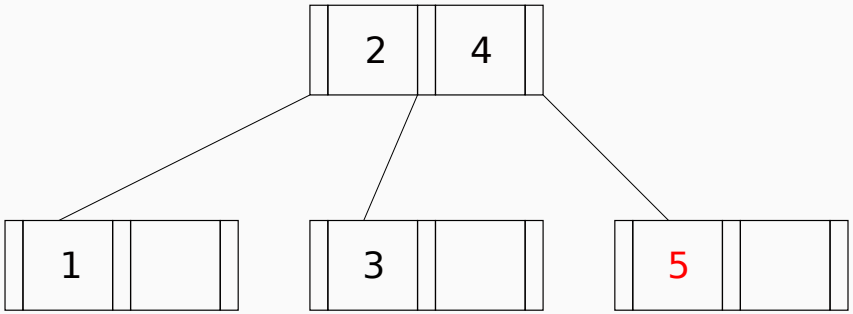


Figure 12: B-arbre d'ordre 1.

- Comment on insère (1min de réflexion avant de donner une réponse!)?

Exemples d'insertion: 6

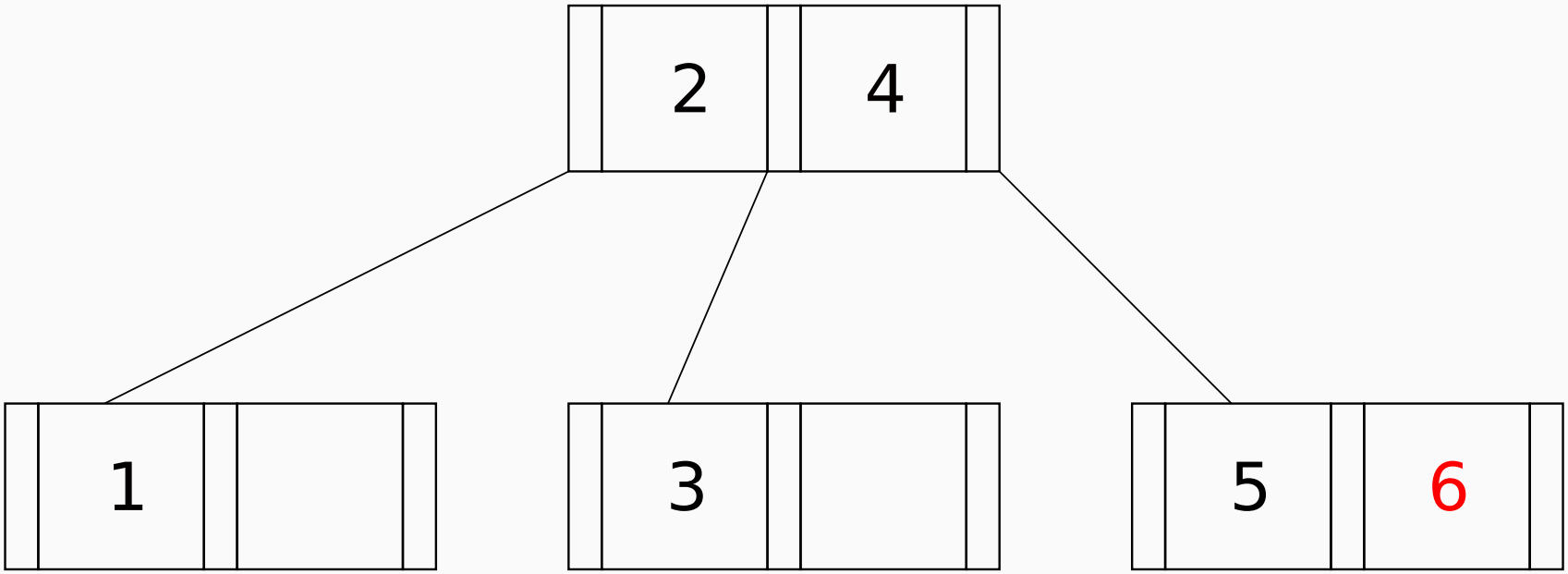


Figure 13: B-arbre d'ordre 1.

Exemples d'insertion: 6

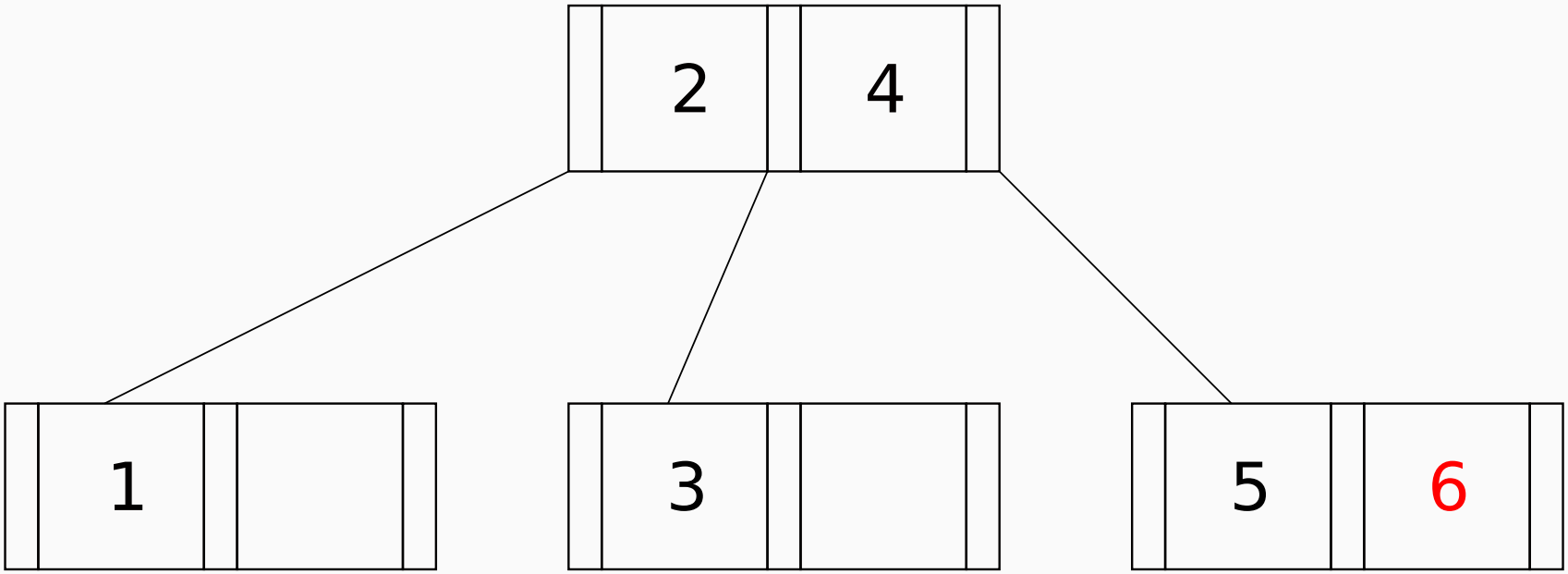


Figure 13: B-arbre d'ordre 1.

- 6 > 4 on descend à droite;
- 6 > 5 et on a à la place à droite, on insère.

Les B-arbres

Exemples d'insertion: 7

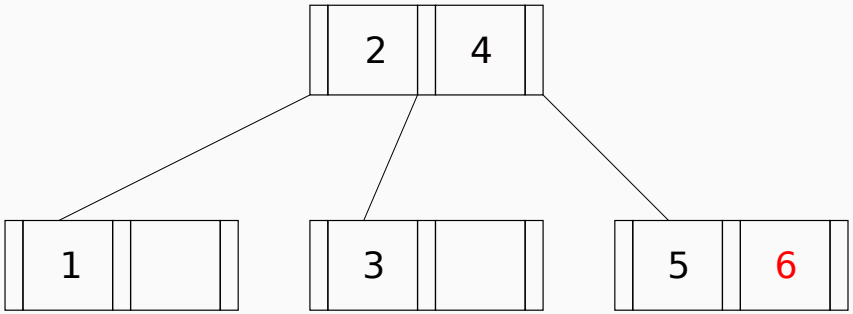


Figure 14: B-arbre d'ordre 1.

- Comment on insère (1min de réflexion avant de donner une réponse!)?

Exemples d'insertion: 7

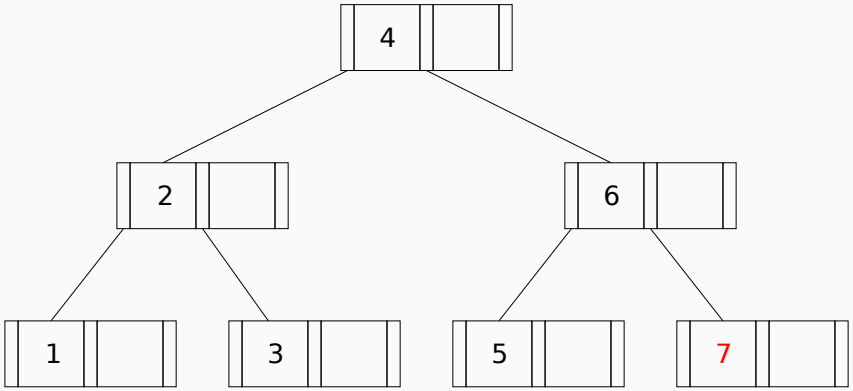


Figure 15: B-arbre d'ordre 1.

Exemples d'insertion: 7

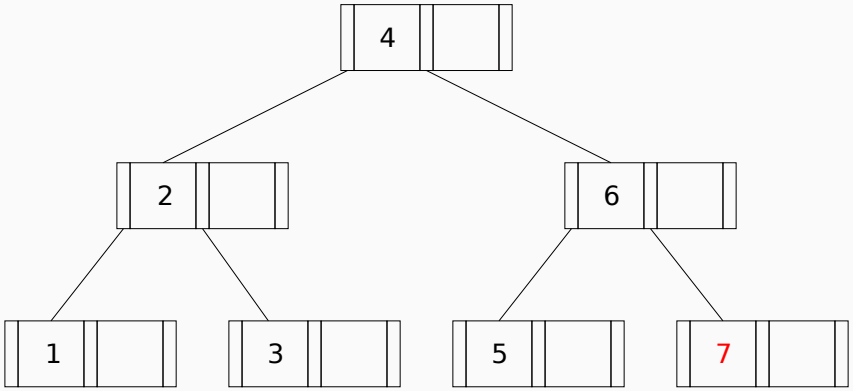


Figure 15: B-arbre d'ordre 1.

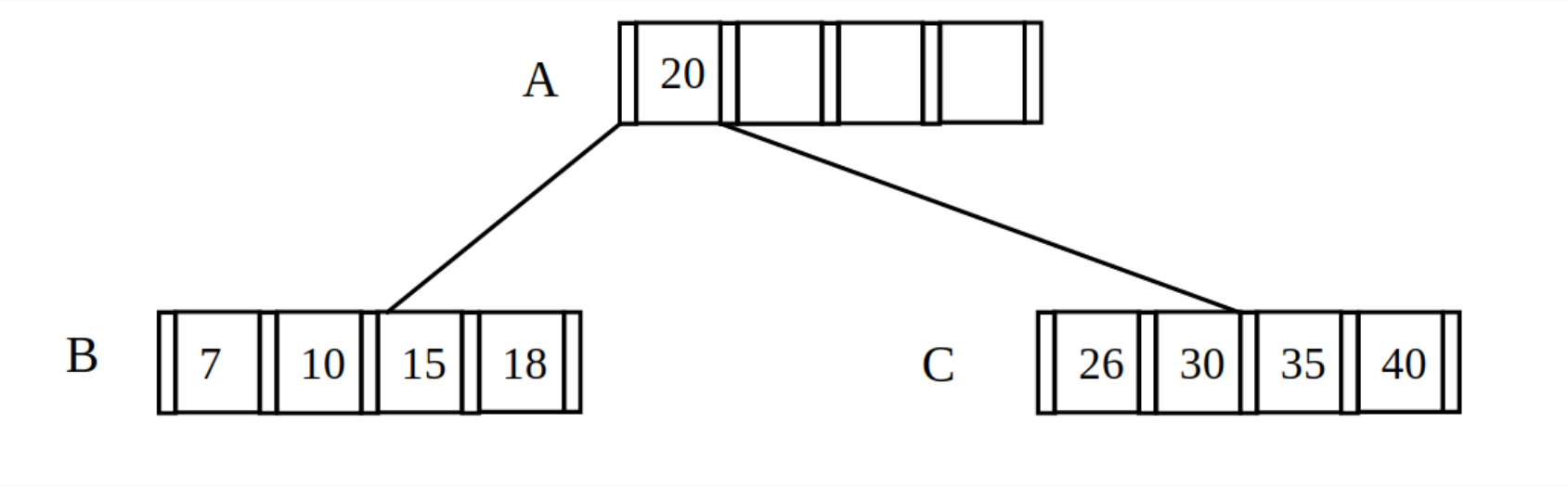
- 7 > 4 on descend à droite;
- 7 > 6 mais on a dépassé la capacité;
- 6 est la médiane de 5, 6, 7, remonte à la racine;
- 5 reste à gauche, 7 à droite, mais 6 fait dépasser la capacité de la racine;
- 4 est la médiane de 2, 4, 6, 4 remonte, 2 reste à gauche, 6 à droite.

L'algorithme d'insertion

0. Rechercher la feuille (la page n'a aucun enfant) où insérer;
1. Si la page n'est pas pleine insérer dans l'ordre croissant.
2. Si la page est pleine, on sépare la page en son milieu :
   - 2.1 On trouve la médiane, `M`, de la page;
   - 2.2 On met les éléments < `M` dans la page de gauche de `M` et les > `M` dans la page de droite de `M`;
   - 2.3 `M` est insérée récursivement dans la page parent.

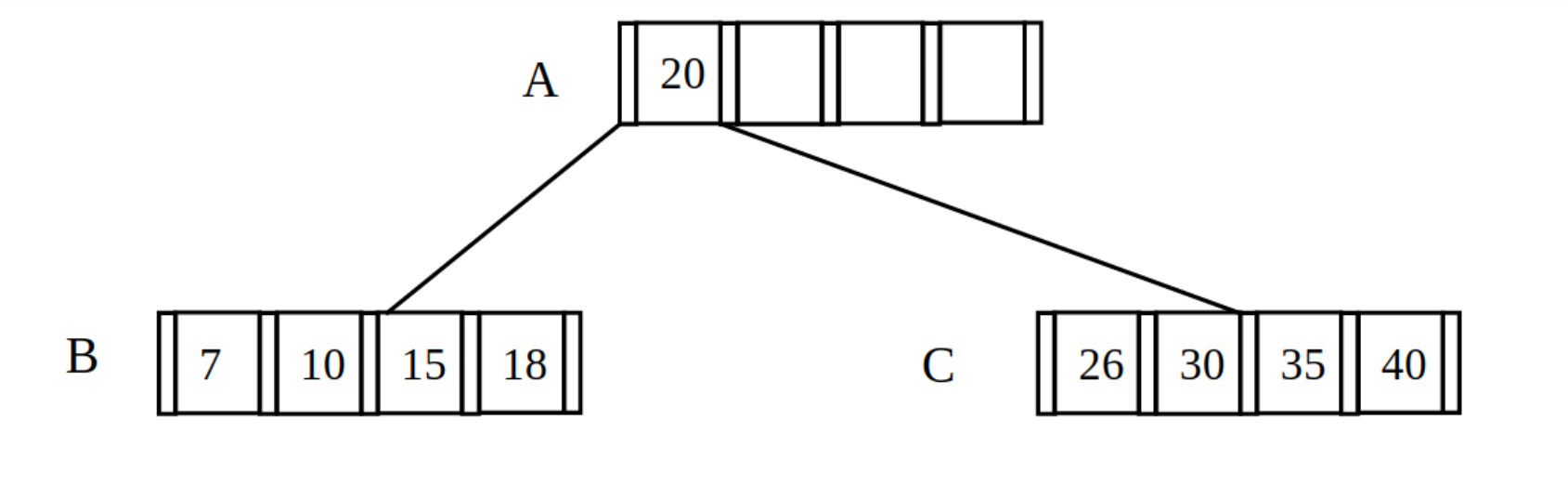
Les B-arbres

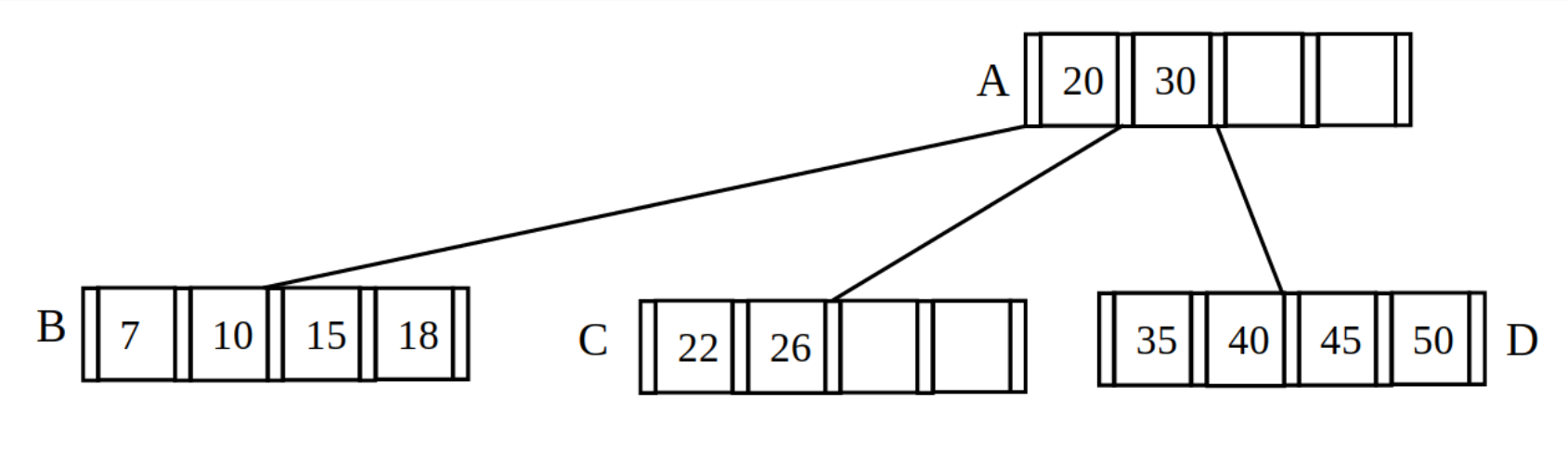
Exercice: insérer `22, 45, 50` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)



Les B-arbres

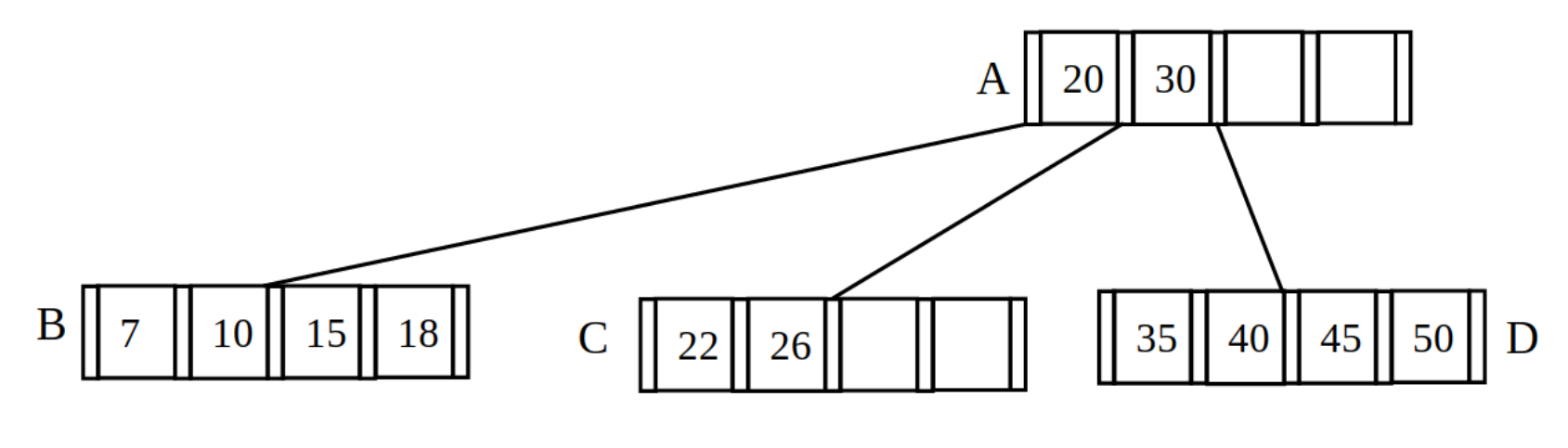
Exercice: insérer `22, 45, 50` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)





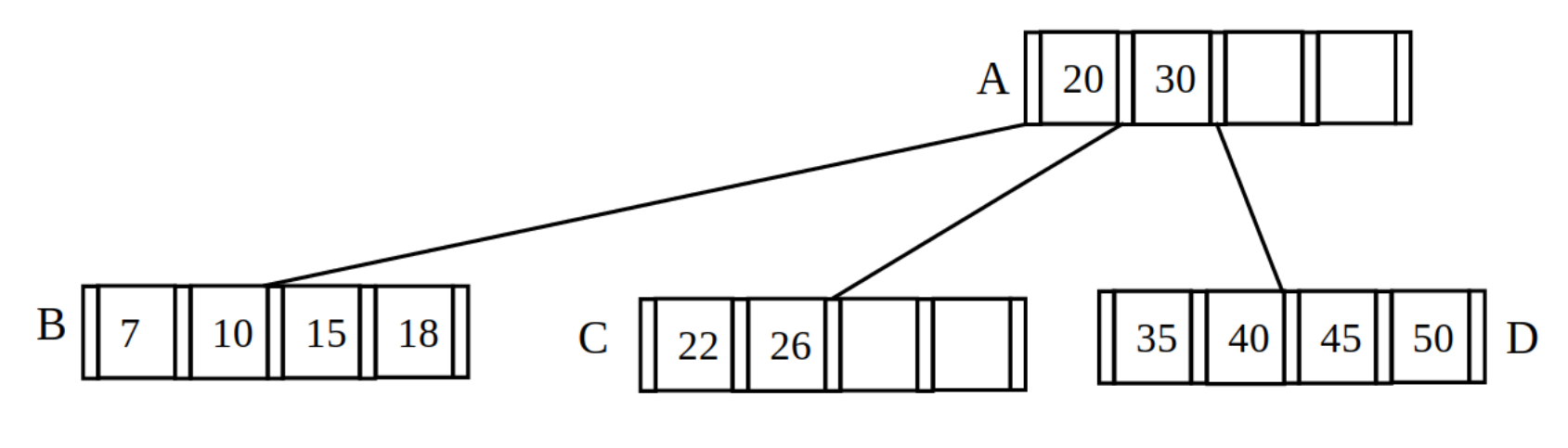
Les B-arbres

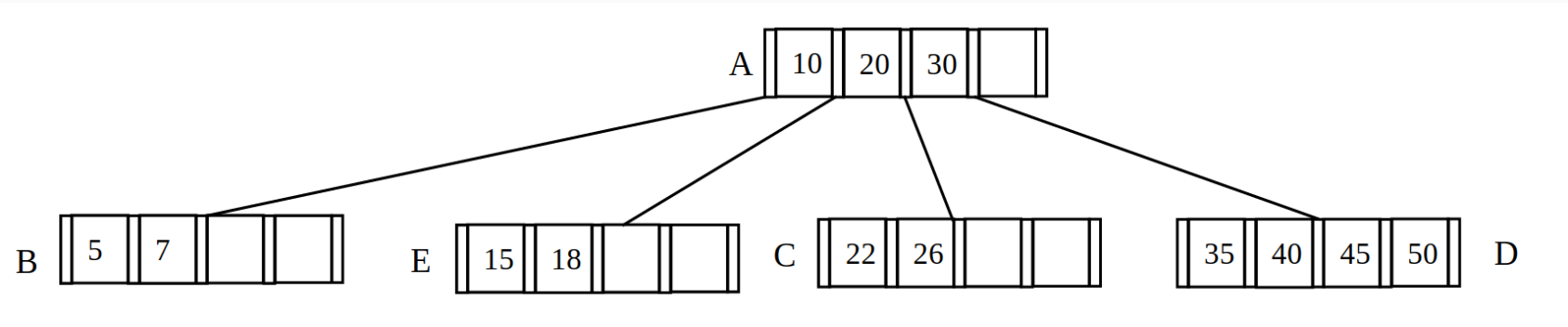
Exercice: insérer 5 dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)



Les B-arbres

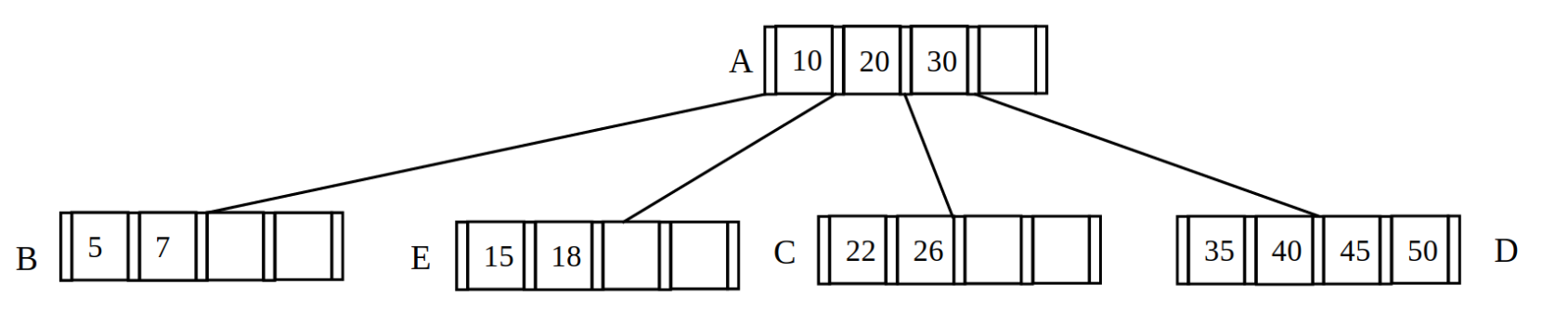
Exercice: insérer 5 dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)





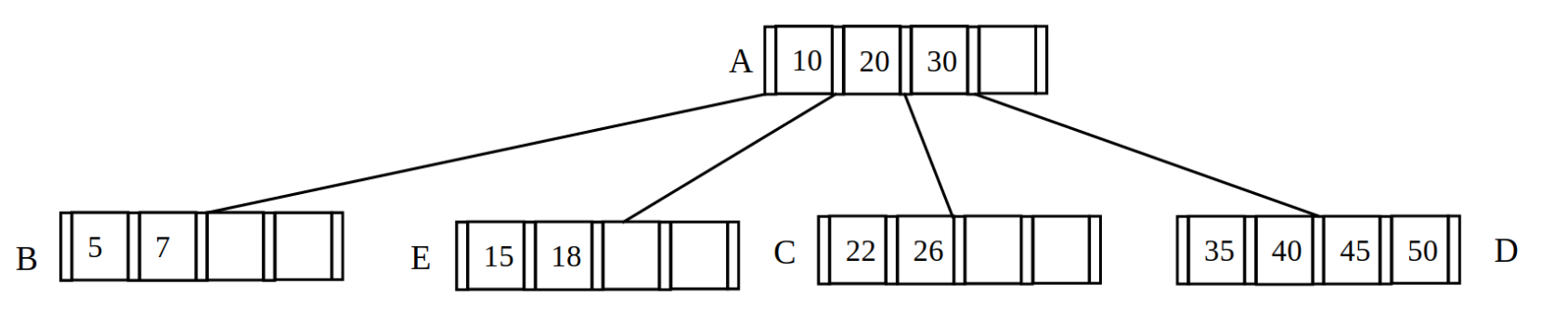
Les B-arbres

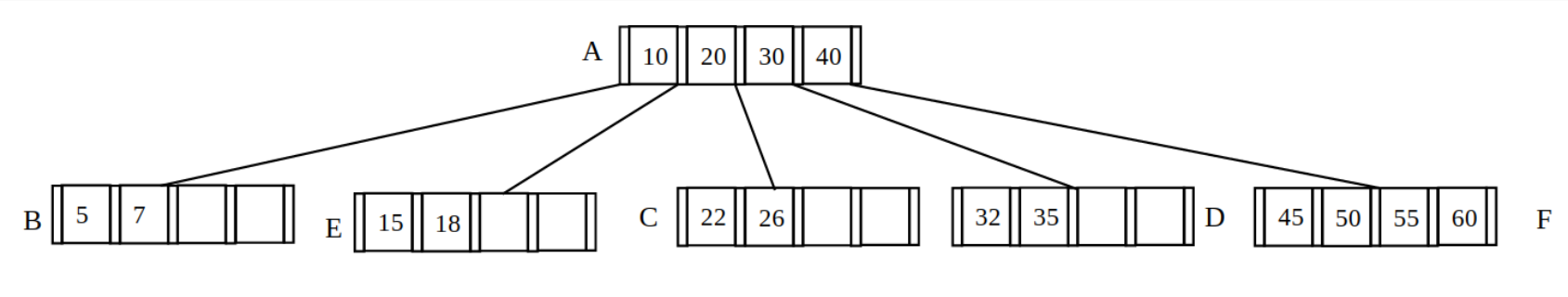
Exercice: insérer `32, 55, 60` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)



Les B-arbres

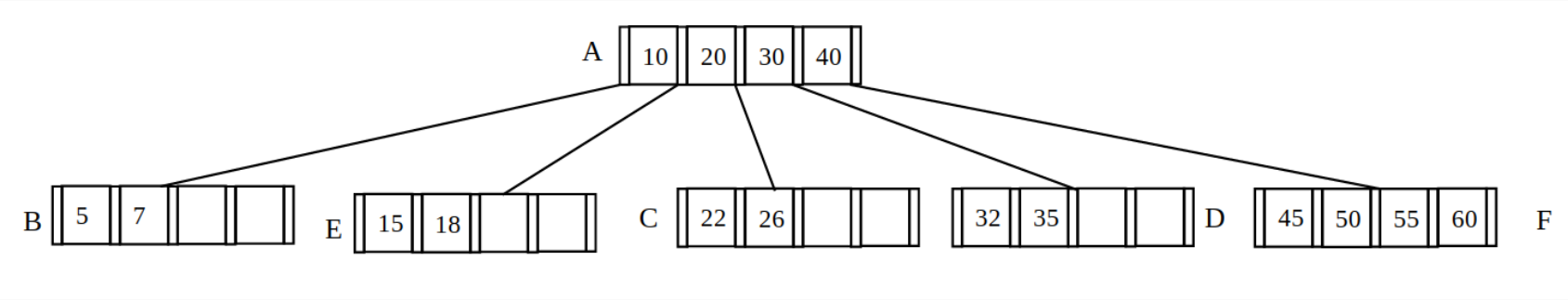
Exercice: insérer `32, 55, 60` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)





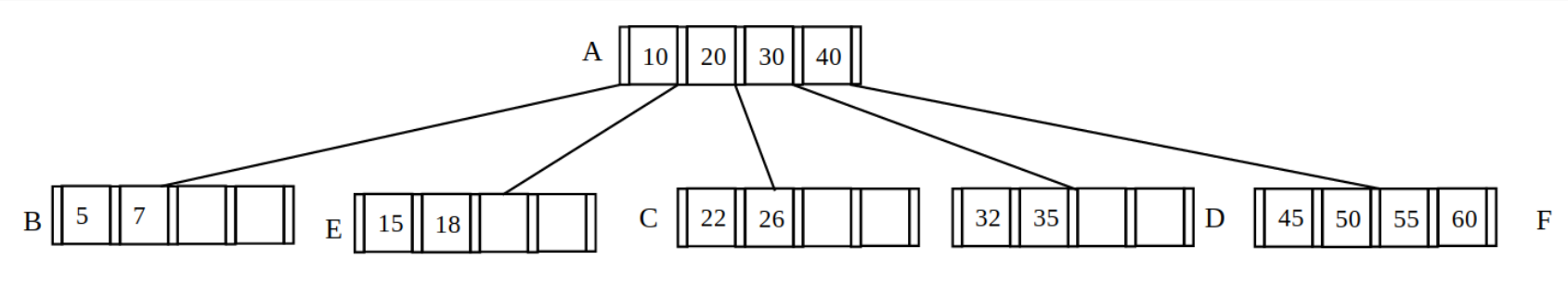
Les B-arbres

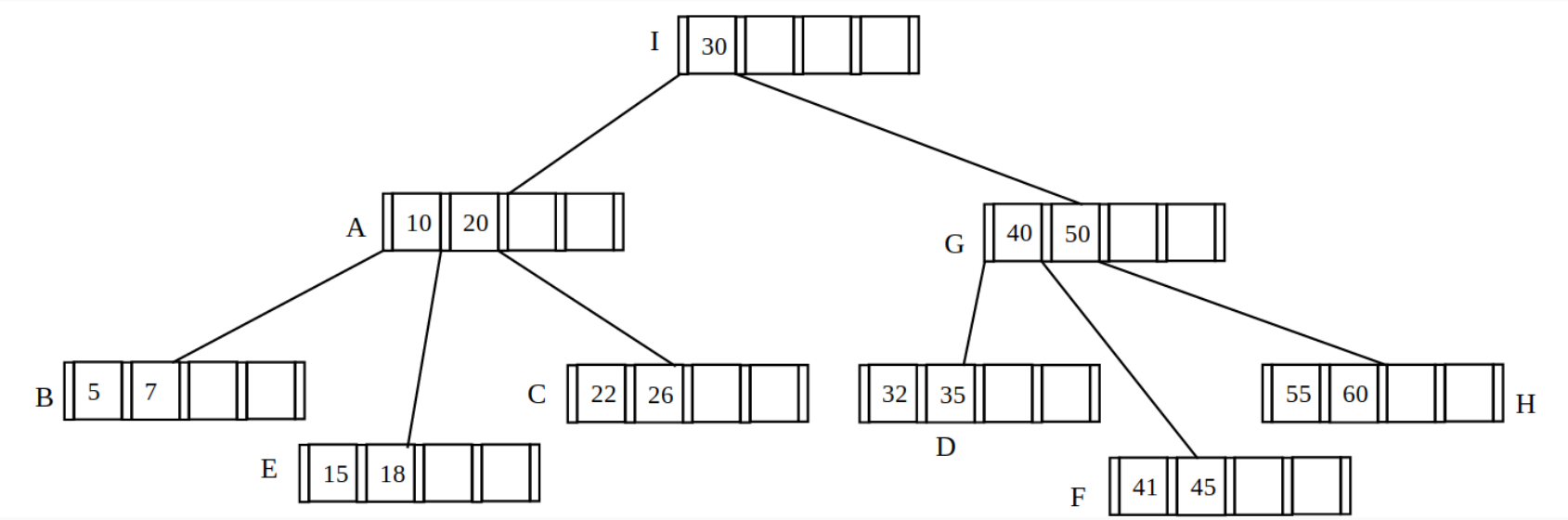
Exercice: insérer `41` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)



Les B-arbres

Exercice: insérer `41` dans l'arbre d'ordre 2 (3min matrix)





Les B-arbres

Exercice (matrix, 15min)

- Insérer 20, 40, 10, 30, 15, 35, 7, 26, 18, 22, 5, 42, 13, 46, 27, 8, 32, 38, 24, 45, 25, 2, 14, 28, 32, 41,
- Dans un B-arbre d'ordre 2.

Les B-arbres

Structure de données

- Chaque page a une contrainte de remplissage, par rapport à l'ordre de l'arbre;
- Un nœud (page) est composé d'un tableau de clés/pointeurs vers les enfants;

```
P_0 | K_1 | P_1 | K_2 | .. | P_i | K_{i+1} | .. | P_{m-1} | K_m | P_m
```

- `P_0`, ..., `P_m` pointeurs vers enfants;
- `K_1`, ..., `K_m` les clés.
- Il y a `m+1` pointeurs mais `m` clés.
- Comment faire pour gérer l'insertion?

Les B-arbres

Faire un dessin de la structure de données (3min matrix)?

Les B-arbres

Faire un dessin de la structure de données (3min matrix)?

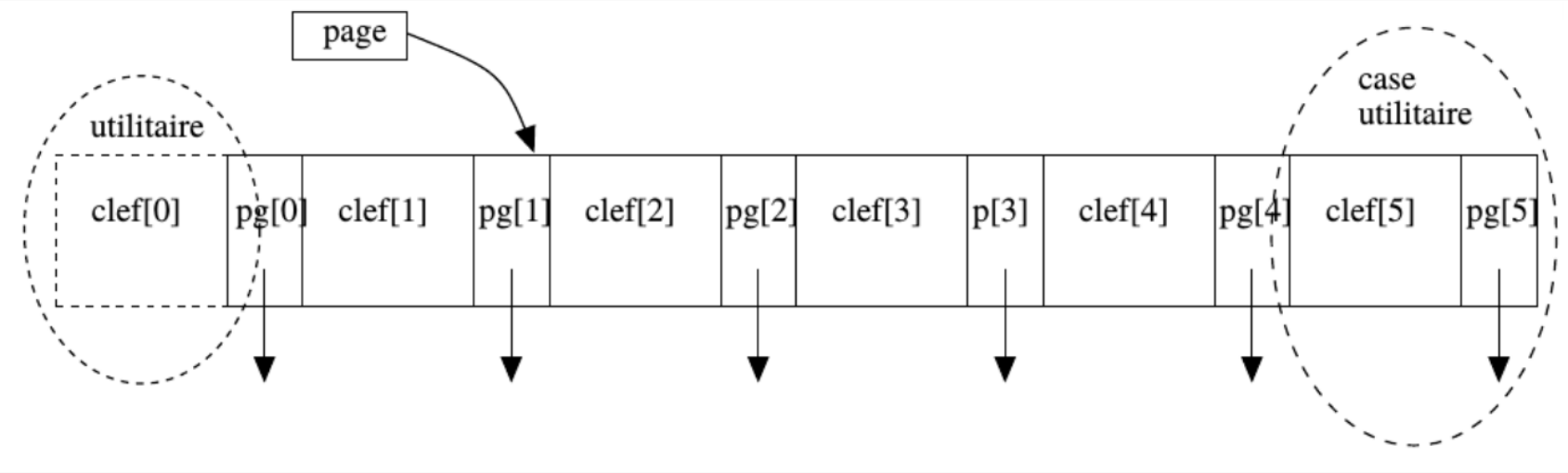
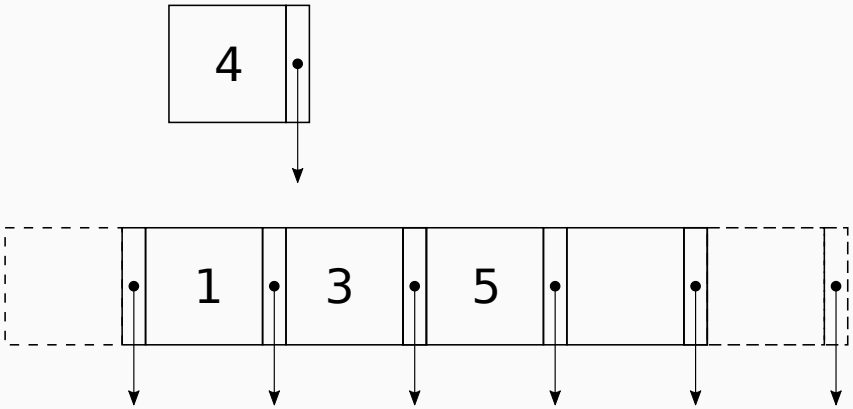


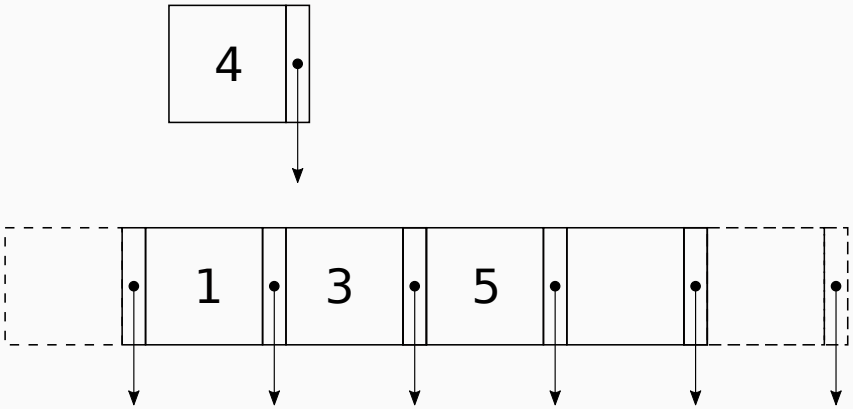
Figure 16: Structure d'une page de B-arbre d'ordre 2.

1. On veut un tableau de `P_i, K_i => struct`;
2. `K_0` va être en "trop";
3. Pour simplifier l'insertion dans une page, on ajoute un élément de plus.

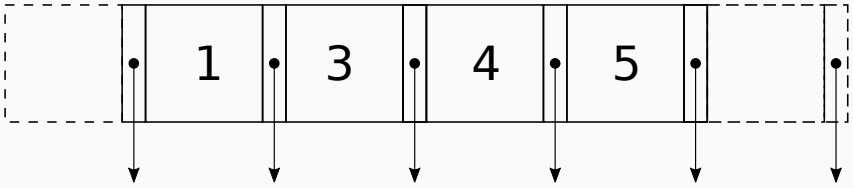
L'insertion cas nœud pas plein, insertion 4?



L'insertion cas nœud pas plein, insertion 4?



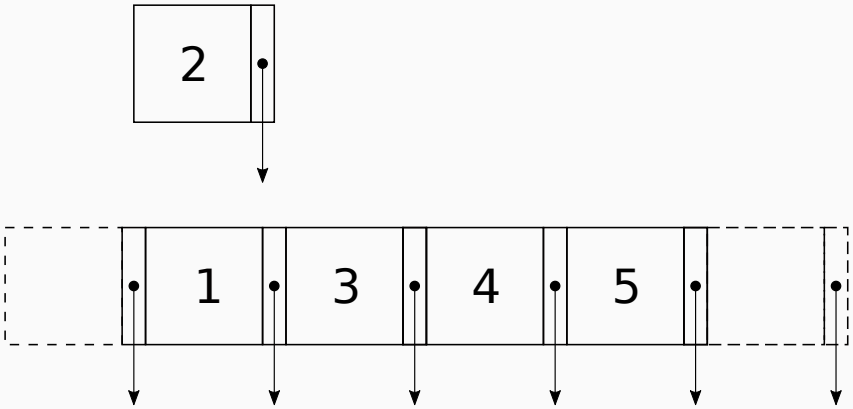
Solution



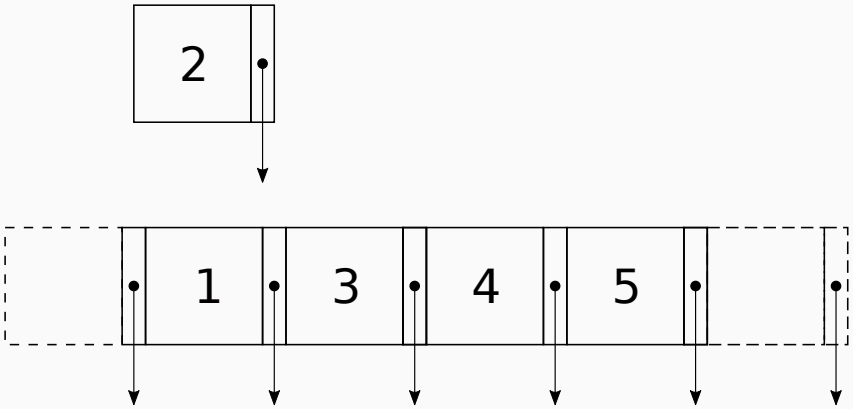
L'insertion cas nœud pas plein, insertion `N`

- On décale les éléments plus grand que `N`;
- On insère `N` dans la place "vide";
- Si la page n'est pas pleine, on a terminé.

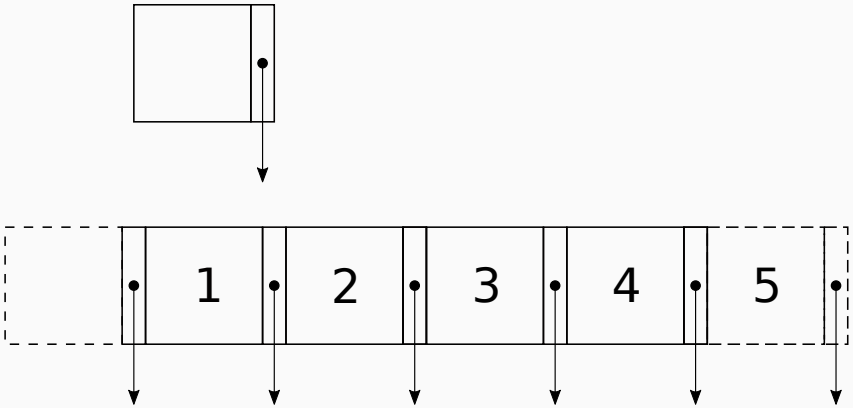
L'insertion cas nœud plein, insertion 2?



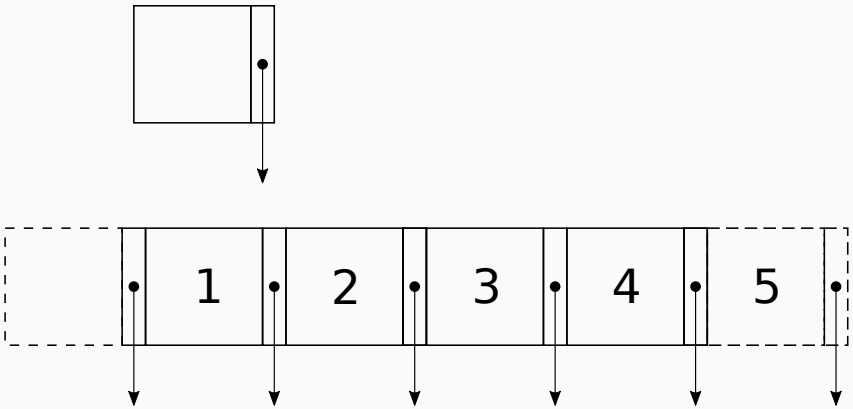
L'insertion cas nœud plein, insertion 2?



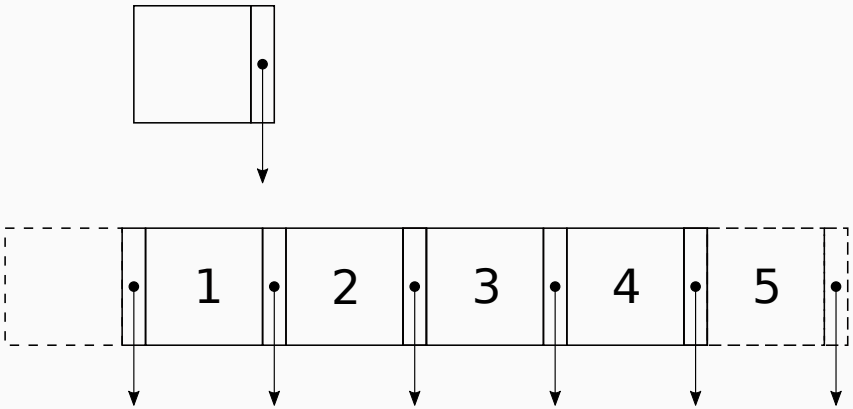
Solution



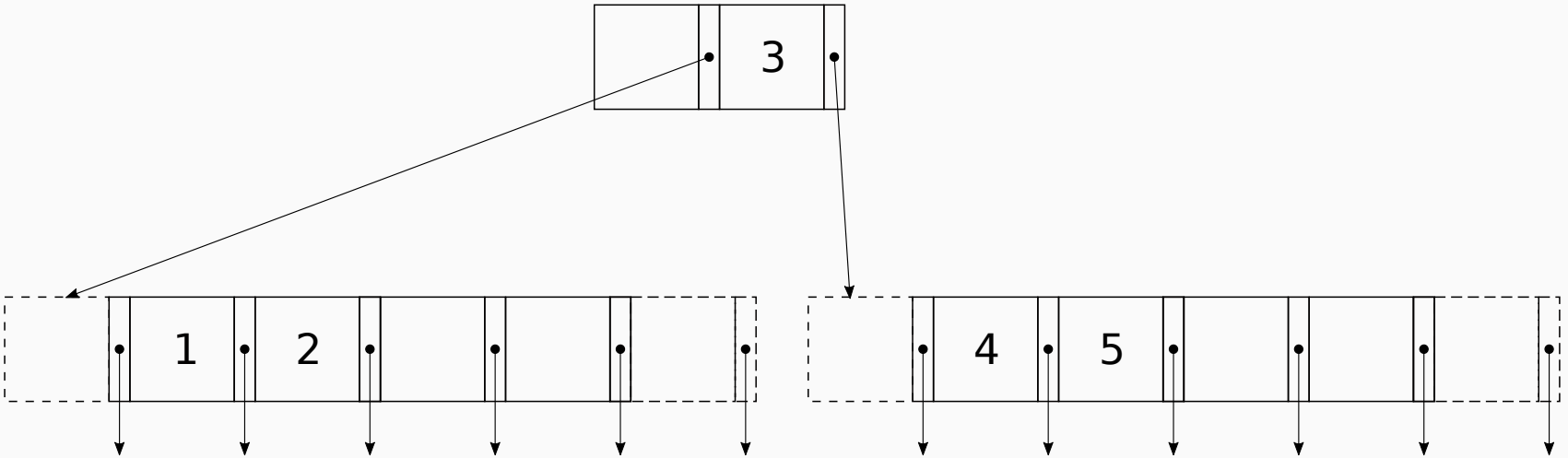
L'insertion cas nœud plein, promotion 3?



L'insertion cas nœud plein, promotion 3?



Solution



L'insertion cas nœud plein, insertion `N`

- On décale les éléments plus grand que `N`;
- On insère `N` dans la place "vide";
- Si la page est pleine:
  - On trouve la valeur médiane `M` de la page (quel indice?);
  - On crée une nouvelle page de droite;
  - On copie les valeurs à droite de `M` dans la nouvelle page;
  - On promeut `M` dans la page du dessus;
  - On connecte le pointeur de gauche de `M` et de droite de `M` avec l'ancienne et la nouvelle page respectivement.

Les B-arbres

Pseudo-code structure de données (3min, matrix)?

Les B-arbres

Pseudo-code structure de données (3min, matrix)?

```
struct page
    entier ordre, nb
    element tab[2*ordre + 2]
```

```
struct element
    entier clé
    page pg
```

Les fonctions utilitaires (5min matrix)

```
booléen est_feuille(page)      // la page est elle une feuille?
entier position(page, valeur) // à quelle indice on insère?
booléen est_dans_page(page, valeur) // la valeur est dans la page
```

Les fonctions utilitaires (5min matrix)

```
booléen est_feuille(page)      // la page est elle une feuille?
entier position(page, valeur) // à quelle indice on insère?
booléen est_dans_page(page, valeur) // la valeur est dans la page
```

```
booléen est_feuille(page)
    retourne (page.tab[0].pg == vide)

entier position(page, valeur)
    i = 0
    tant que i < page.nb && valeur >= page.tab[i+1].clef
        i += 1
    retourne i

booléen est_dans_page(page, valeur)
    i = position(page, valeur)
    retourne (page.nb > 0 && page.tab[i].val == valeur)
```

Les B-arbres

Les fonctions utilitaires (5min matrix)

```
page nouvelle_page(ordre)  // créer une page
rien liberer_memoire(page) // libérer tout un arbre!
```

Les B-arbres

Les fonctions utilitaires (5min matrix)

```
page nouvelle_page(ordre)  // créer une page
rien liberer_memoire(page) // libérer tout un arbre!
```

```
page nouvelle_page(ordre)
    page = allouer(page)
    page.ordre = ordre
    page.nb = 0
    page.tab = allouer(2*ordre+2)
    retourner page

rien liberer_memoire(page)
    si est_feuille(page)
        liberer(page.tab)
        liberer(page)
    sinon
        pour fille dans page.tab
            liberer_memoire(fille)
        liberer(page.tab)
        liberer(page)
```

Les B-arbres

Les fonctions (5min matrix)

```
page recherche(page, valeur) // retourner la page contenant
                             // la valeur ou vide
```

Les B-arbres

Les fonctions (5min matrix)

```
page recherche(page, valeur) // retourner la page contenant
                             // la valeur ou vide
```

```
page recherche(page, valeur)
    si est_dans_page(page, valeur)
        retourne page
    sinon si est_feuille(page)
        retourne vide
    sinon
        recherche(page.tab[position(page, valeur) - 1], valeur)
```