Flots dans les graphes

Algorithmique et structures de données, 2023-2024

P. Kunzli (Cloud) et O. Malaspinas (A401), ISC, HEPIA

2024-06-04

En partie inspirés des supports de cours de P. Albuquerque

Rappel (1/2)

Algorithme de Dijkstra: à quoi sert-il?

Rappel (1/2)

Algorithme de Dijkstra: à quoi sert-il?

A trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe!

Algorithme de Dijkstra: algorithme?

Rappel (1/2)

Algorithme de Dijkstra: à quoi sert-il?

A trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe!

Algorithme de Dijkstra: algorithme?

```
distance[source] = 0
distance[reste]  = inf
pour sommet dans liste_sommets:
    fp = enfiler(fp, sommet, w(source, sommet)) // file min
tant !est_vide(fp):
    sommet_courant, fp = défiler(fp)
    pour sommet_voisin dans voisinage(sommet_courant):
        n_dist = distance[sommet_courant] + w(sommet_courant, sommet_voisin)
        si distance[sommet_voisin] > n_dist:
            distance[sommet_voisin] = n_dist
            precedence[sommet_voisin] = sommet_courant
            fp = mettre_a_jour(fp, sommet_voisin, n_dist)
```

Rappel (2/2)

Algorithme de Floyd: à quoi sert-il?

Rappel (2/2)

Algorithme de Floyd: à quoi sert-il?

A trouver le plus court chemin entre toutes les paires de sommets d'un graphe!

Algorithme de Floyd: algorithme?

Rappel (2/2)

Algorithme de Floyd: à quoi sert-il?

A trouver le plus court chemin entre toutes les paires de sommets d'un graphe!

Algorithme de Floyd: algorithme?

```
matrice, matrice floyd_warshall(distance, n, w)
    pour k de 1 à n
        pour i de 1 à n
            pour j de 1 à n
                n_distance = distance[i][k] + distance[k][j]
                si n_distance < distance[i][j]
                    distance[i][j] = n_distance
                    précédence[i][j] = précédence[k][j]
    retourne distance, précédence
```

Sans transition.... la suite!

Trouver un réseau électrique pour

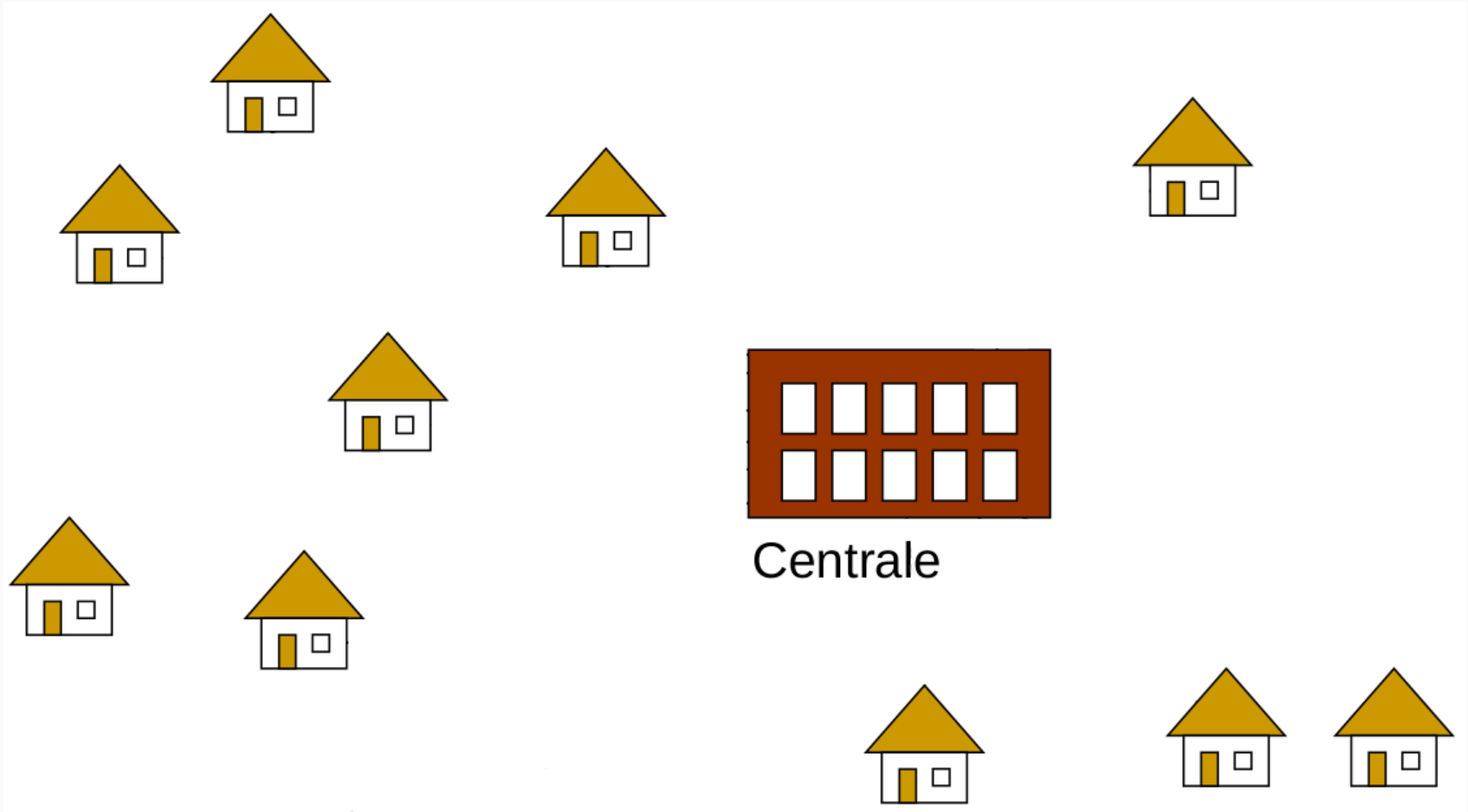


Figure 1: Ces maisons n'ont pas d'électricité.

Solution: pas optimale

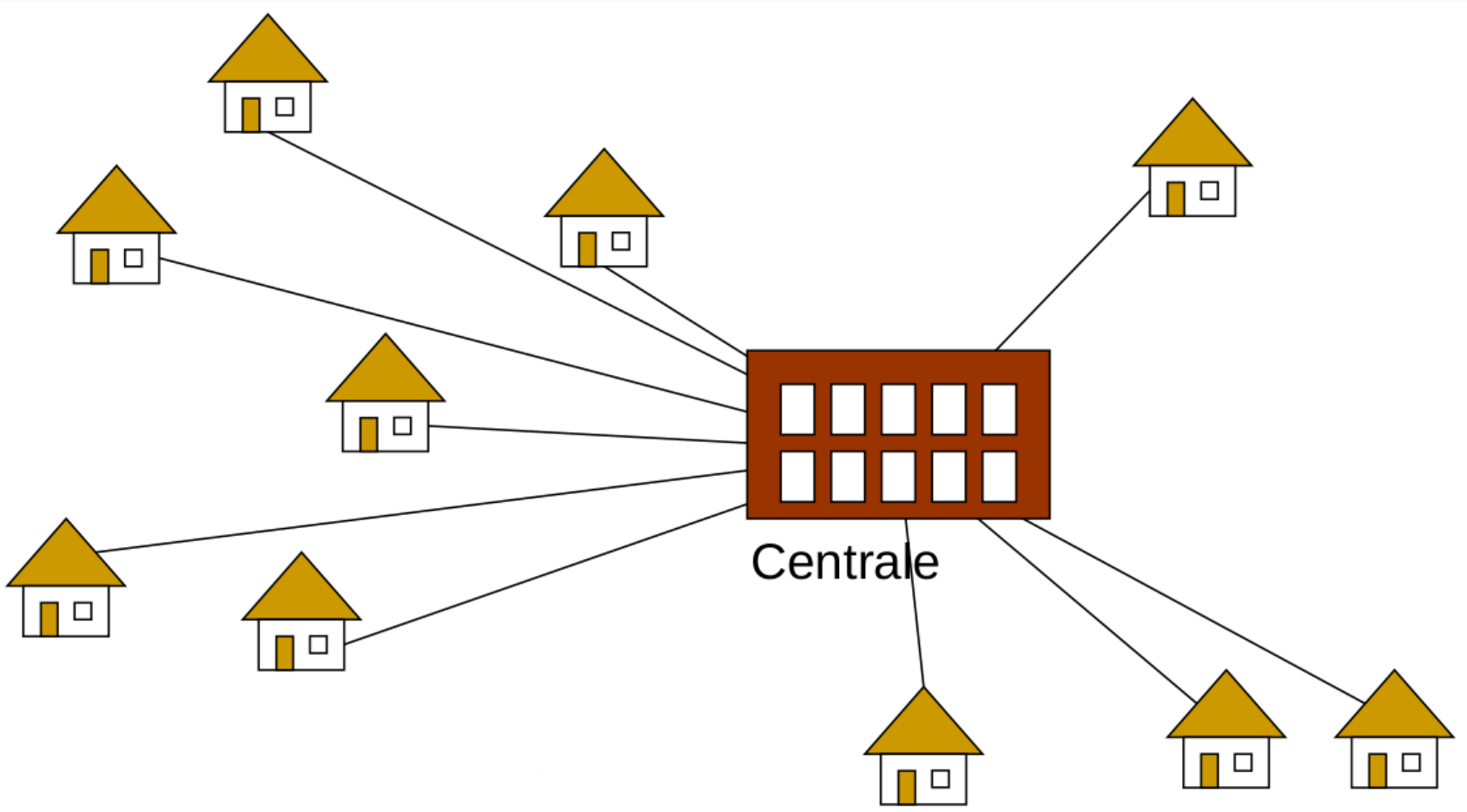


Figure 2: Le réseau simple, mais nul.

- La longueur totale des câbles est super longue!

Solution: optimale

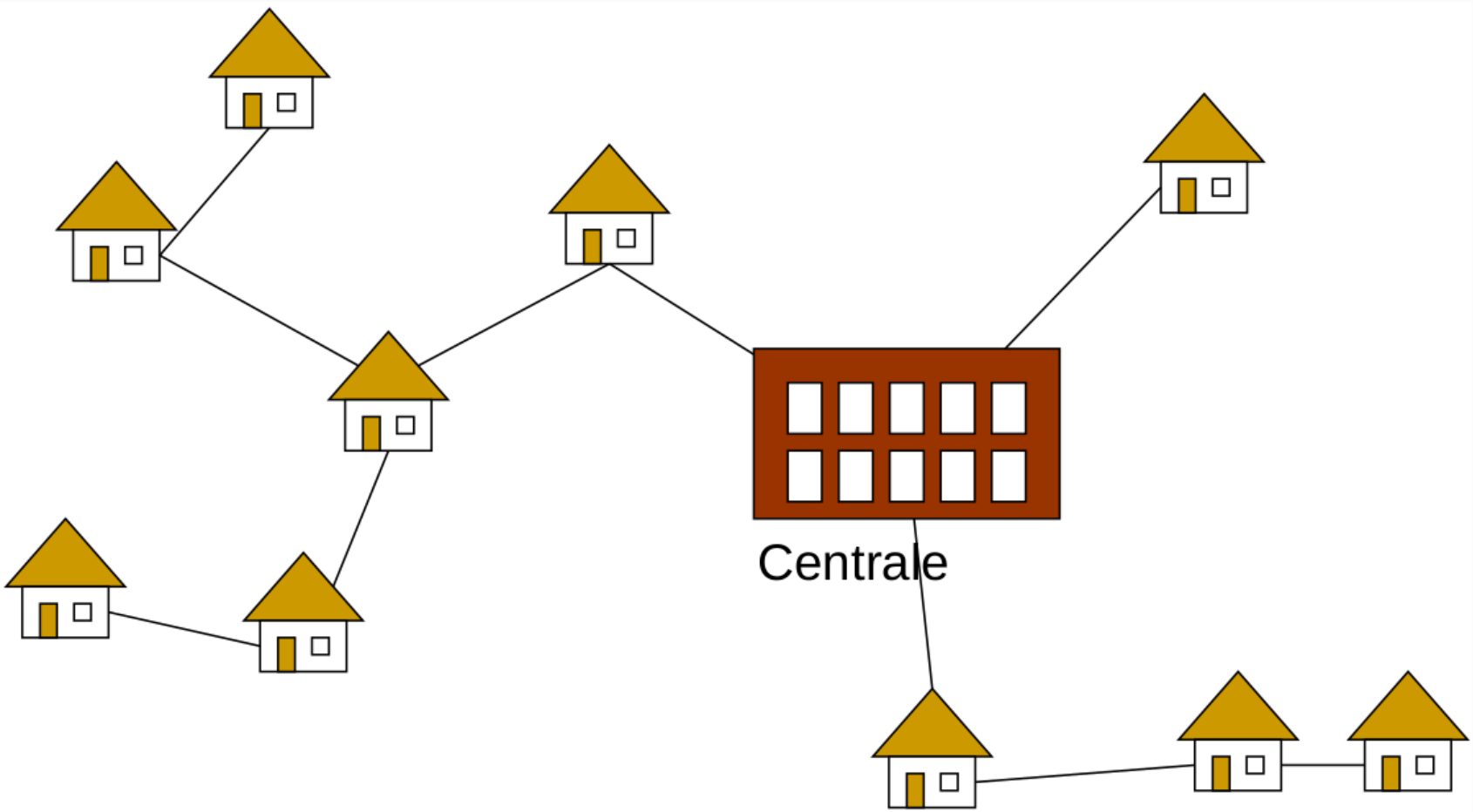


Figure 3: Le meilleur réseau.

Formalisation: Les arbres couvrants

Application: minimisation des coûts

- Équipement d'un lotissement avec des lignes électriques/téléphoniques, des canalisations, ...

Formalisation: Les arbres couvrants

Application: minimisation des coûts

- Équipement d'un lotissement avec des lignes électriques/téléphoniques, des canalisations, ...
- Pour réduire les coûts, on cherche à minimiser la longueur totale des câbles/tuyaux.

Formalisation: Les arbres couvrants

Application: minimisation des coûts

- Équipement d'un lotissement avec des lignes électriques/téléphoniques, des canalisations, ...
- Pour réduire les coûts, on cherche à minimiser la longueur totale des câbles/tuyaux.
- Les lignes/tuyaux forment un *arbre couvrant*.

Formalisation: Les arbres couvrants

Application: minimisation des coûts

- Équipement d'un lotissement avec des lignes électriques/téléphoniques, des canalisations, ...
- Pour réduire les coûts, on cherche à minimiser la longueur totale des câbles/tuyaux.
- Les lignes/tuyaux forment un *arbre couvrant*.
- La meilleure option est un *arbre couvrant minimal*.

Formalisation: Les arbres couvrants

- Qu'est-ce qu'un arbre couvrant? Des idées? De quel objet on part? Où va-t-on?

Formalisation: Les arbres couvrants

- Qu'est-ce qu'un arbre couvrant? Des idées? De quel objet on part? Où va-t-on?
- Un arbre couvrant d'un graphe non-orienté et connexe est:
  - un arbre inclus dans le graphe qui connecte tous les sommets du graphe.

Formalisation: Les arbres couvrants

- Qu'est-ce qu'un arbre couvrant? Des idées? De quel objet on part? Où va-t-on?
- Un arbre couvrant d'un graphe non-orienté et connexe est:
  - un arbre inclus dans le graphe qui connecte tous les sommets du graphe.

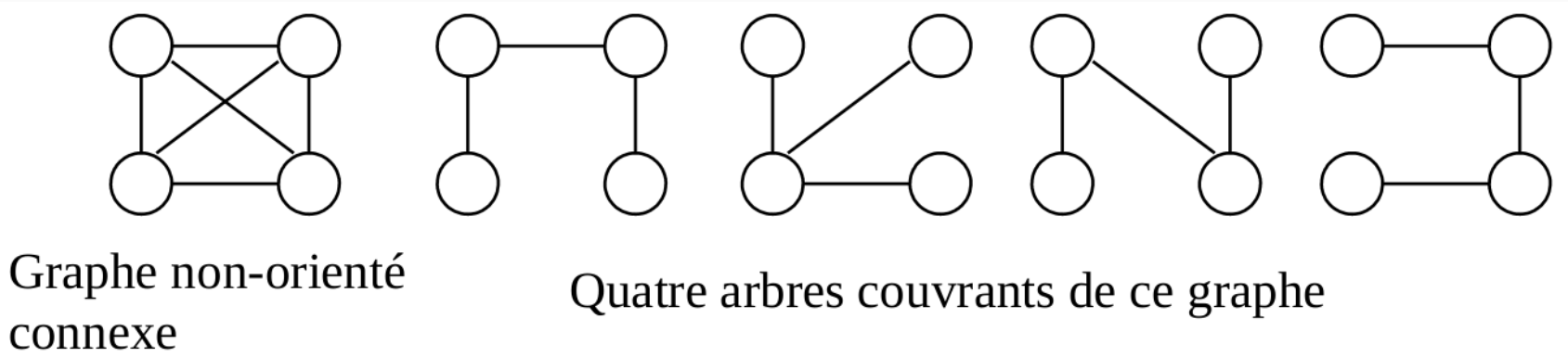


Figure 4: Exemple d'arbres couvrants d'un graphe connexe.

Arbres couvrants

- Quels algorithmes que nous avons déjà vus permettent de construire des arbres couvrants?

Arbres couvrants

- Quels algorithmes que nous avons déjà vus permettent de construire des arbres couvrants?
- Les parcours en largeur et en profondeur!

Arbres couvrants

- Quels algorithmes que nous avons déjà vus permettent de construire des arbres couvrants?
- Les parcours en largeur et en profondeur!

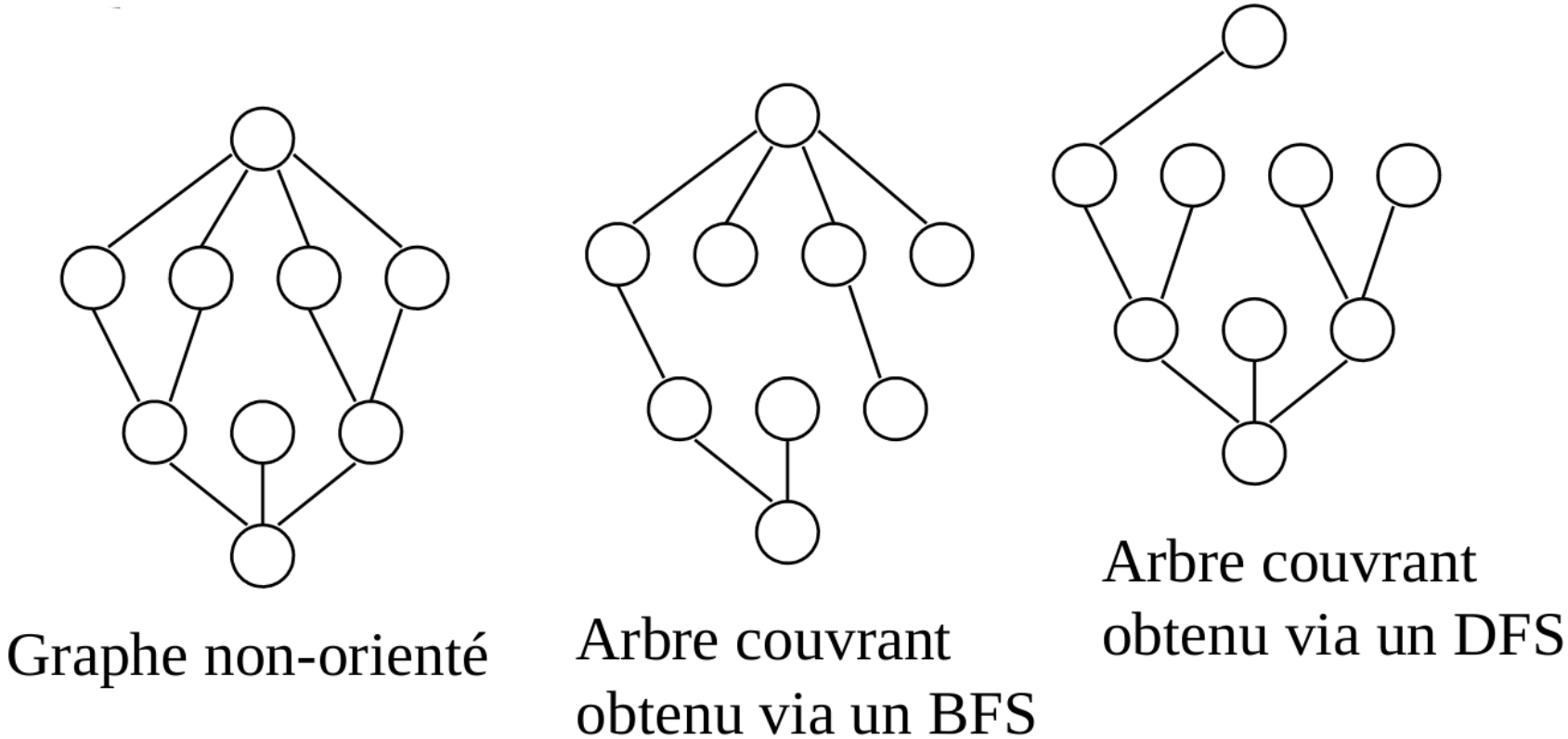


Figure 5: Graphe, et parcours comme arbres couvrants.

Arbres couvrants minimaux

- Un *arbre couvrant minimal* est un sous-graphe d'un graphe non-orienté pondéré $G(V, E)$, tel quel:
  - C'est un arbre (graphe acyclique);
  - Il couvre tous les sommets de G et contient $|V| - 1$ arêtes;
  - Le coût total associé aux arêtes de l'arbre est minimum parmi tous les arbres couvrants possibles.

Arbres couvrants minimaux

- Un *arbre couvrant minimal* est un sous-graphe d'un graphe non-orienté pondéré $G(V, E)$, tel quel:
  - C'est un arbre (graphe acyclique);
  - Il couvre tous les sommets de G et contient $|V| - 1$ arêtes;
  - Le coût total associé aux arêtes de l'arbre est minimum parmi tous les arbres couvrants possibles.
- Est-il unique?

Arbres couvrants minimaux

- Un *arbre couvrant minimal* est un sous-graphe d'un graphe non-orienté pondéré $G(V, E)$, tel quel:
  - C'est un arbre (graphe acyclique);
  - Il couvre tous les sommets de G et contient $|V| - 1$ arêtes;
  - Le coût total associé aux arêtes de l'arbre est minimum parmi tous les arbres couvrants possibles.
- Est-il unique?
- Pas forcément.

Arbres couvrants minimaux

- Comment générer un arbre couvrant minimal?

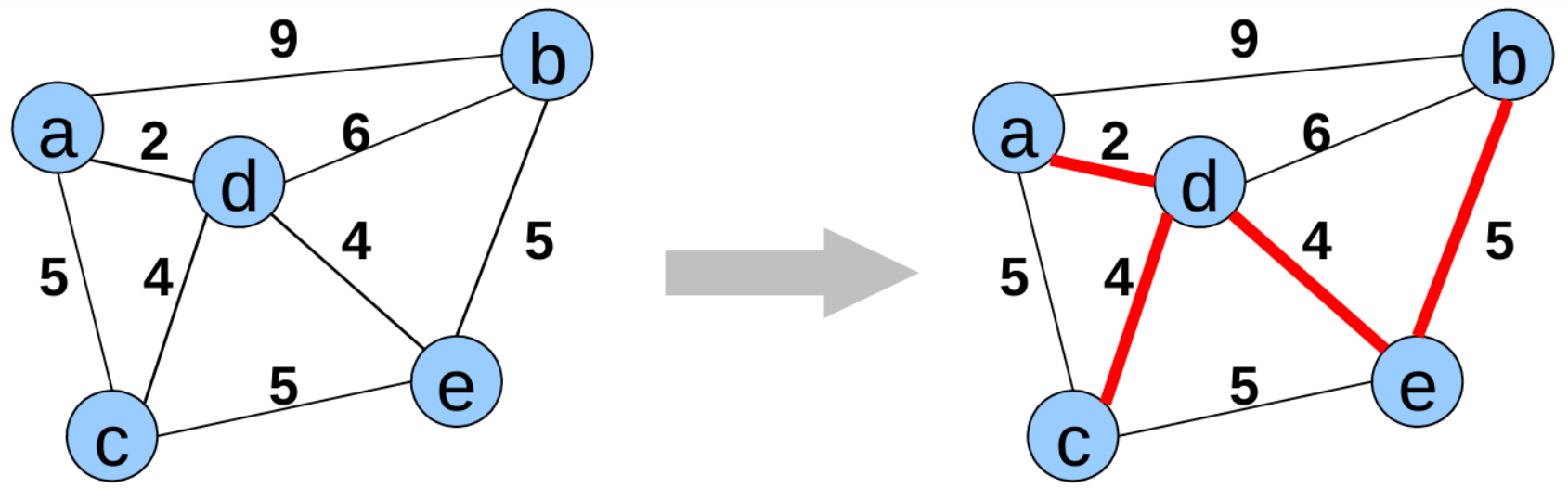


Figure 6: Un graphe, connexe, non-orienté, pondéré, et son arbre couvrant minimal.

Algorithme de Prim

Un exemple

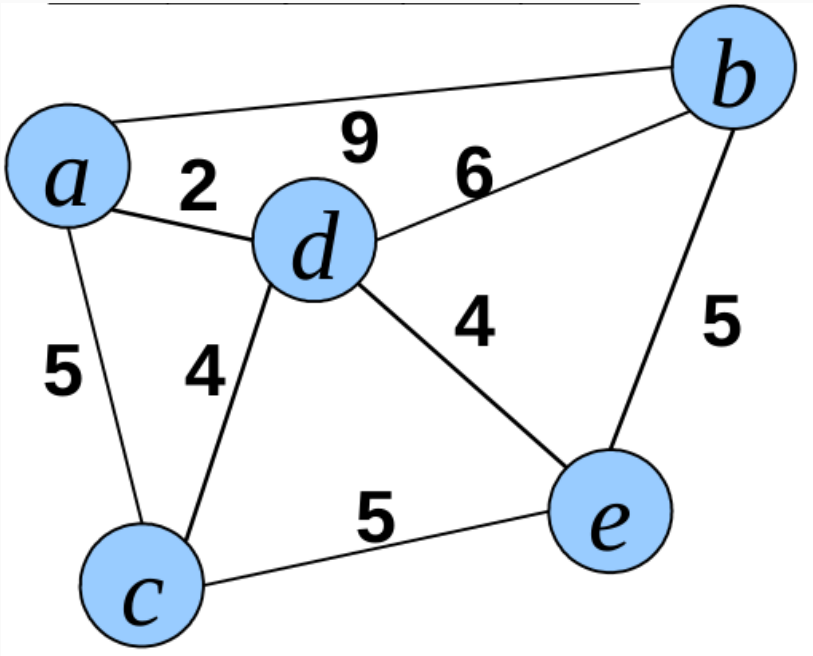


Figure 7: Le graphe de départ.

On part de e (au hasard)

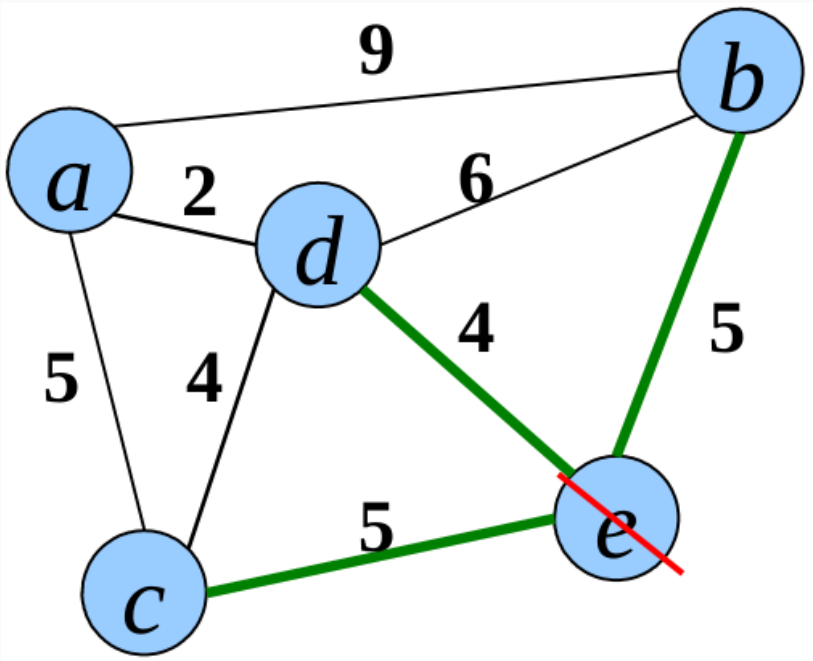


Figure 8: Le sommet e est couvert.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

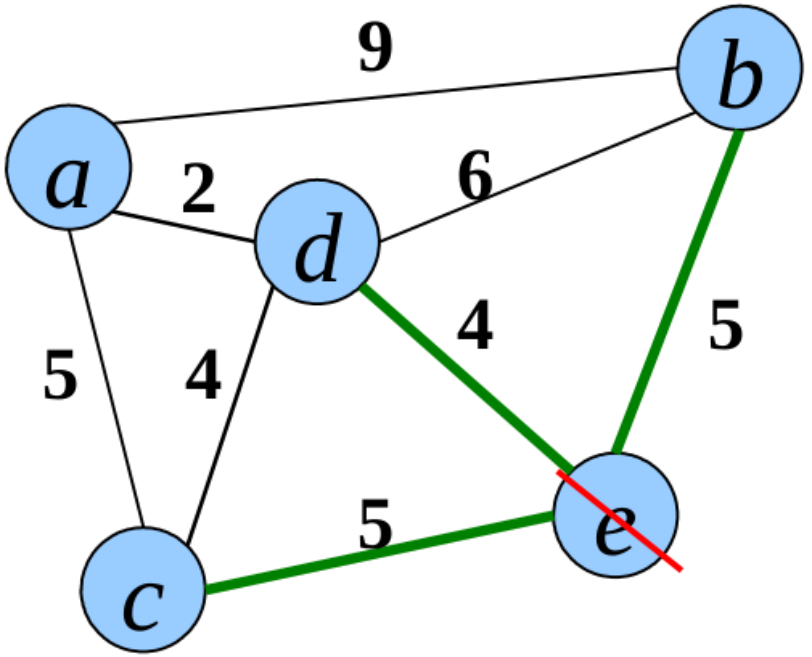


Figure 9: Quelle arête choisir?

Algorithme de Prim

On choisit comment?

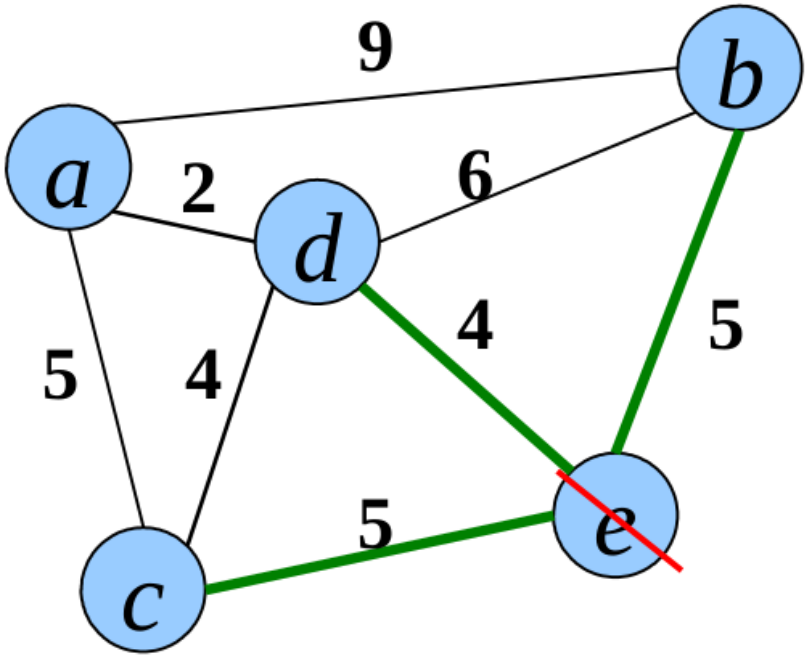


Figure 9: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

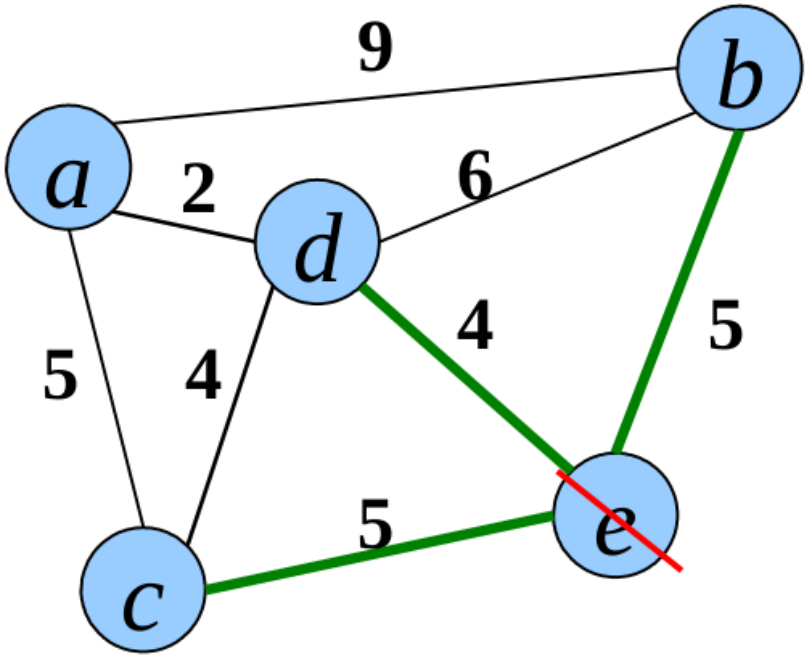


Figure 9: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

L'arête `e->d`

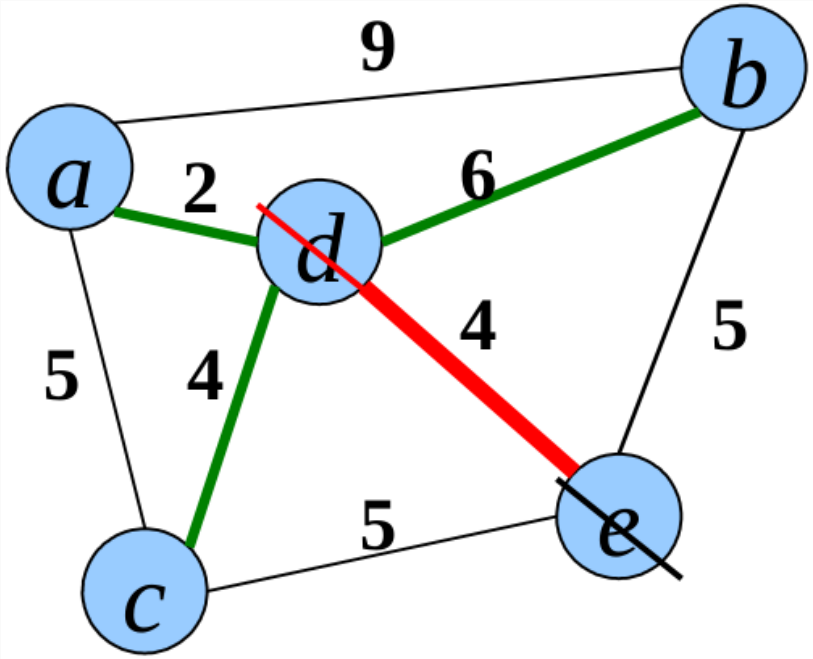


Figure 10: Le sommet `d` est couvert.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

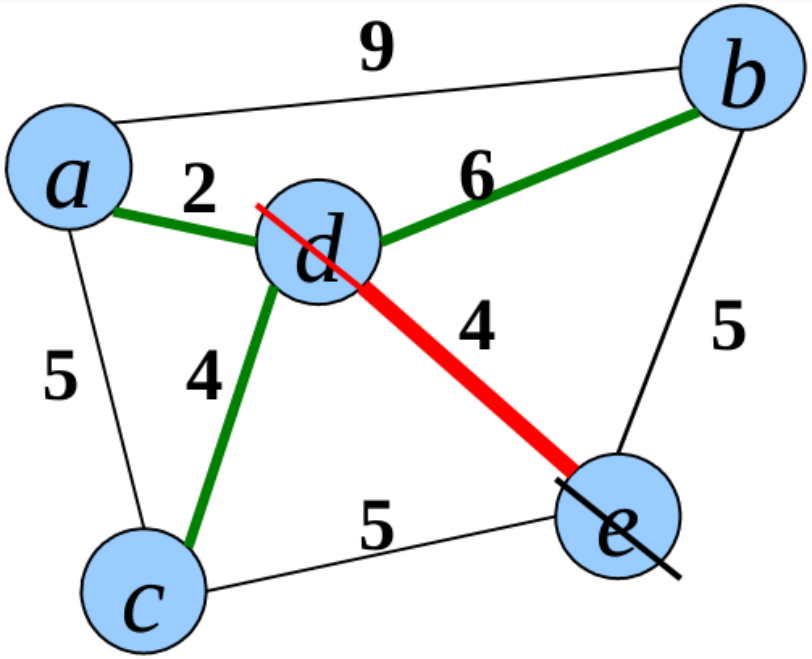


Figure 11: Quelle arête choisir?

Algorithme de Prim

On choisit comment?

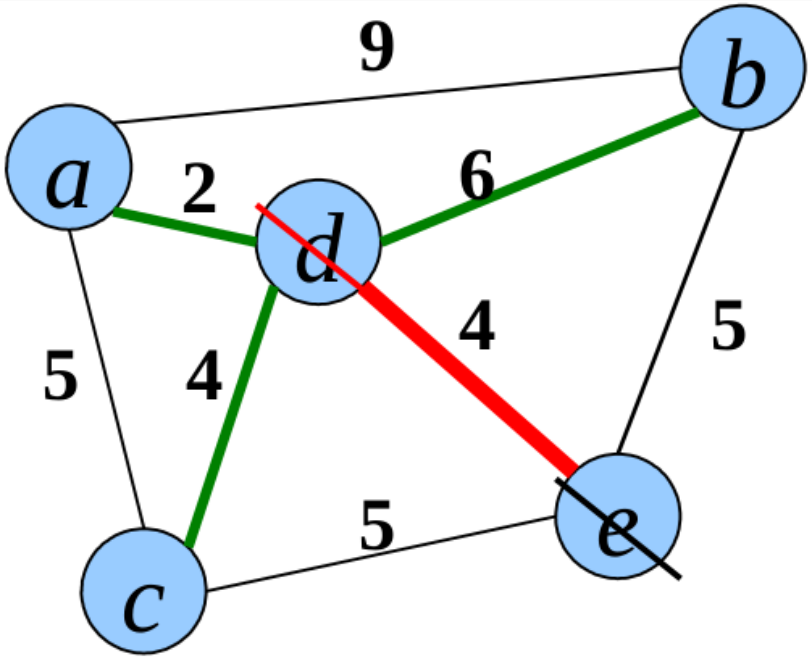


Figure 11: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

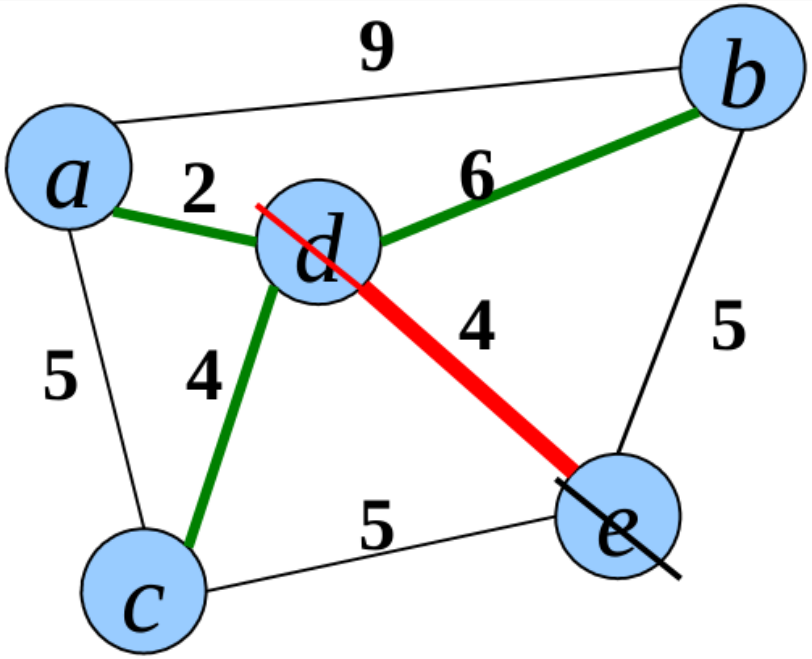


Figure 11: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

L'arête `d->a`

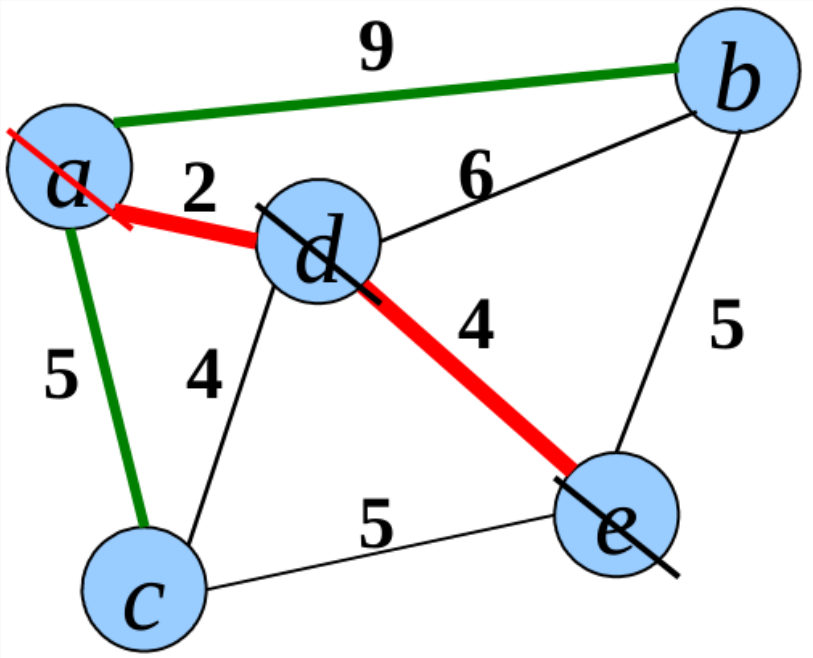


Figure 12: Le sommet a est couvert.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

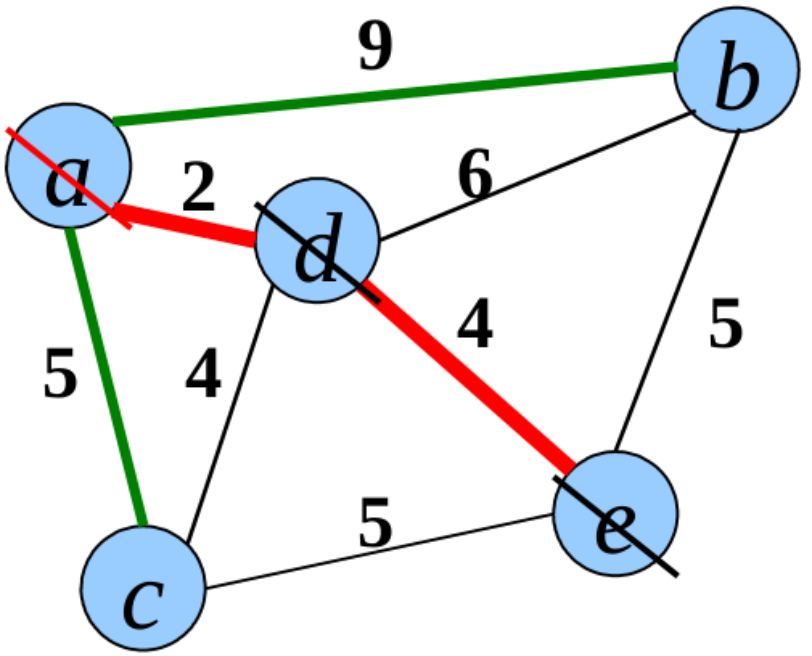


Figure 13: Quelle arête choisir?

Algorithme de Prim

On choisit comment?

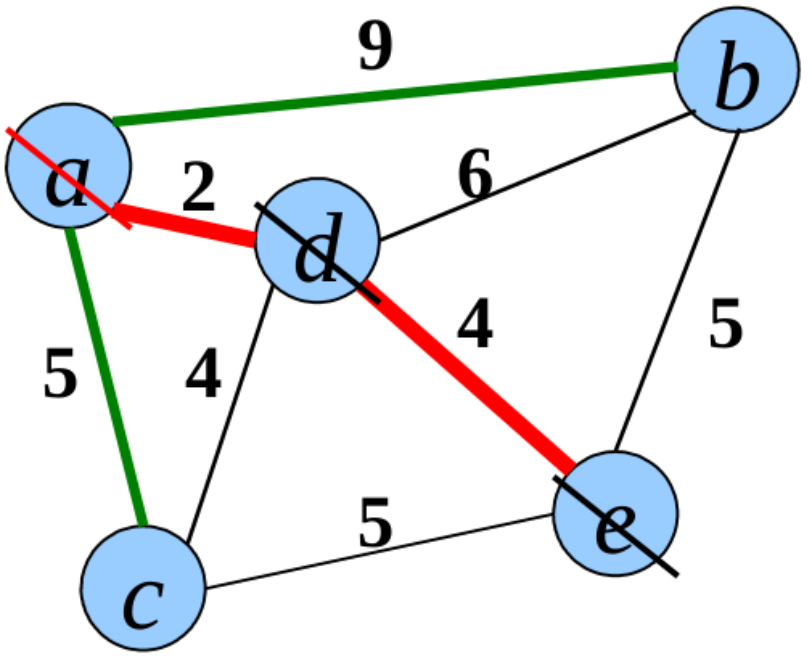


Figure 13: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

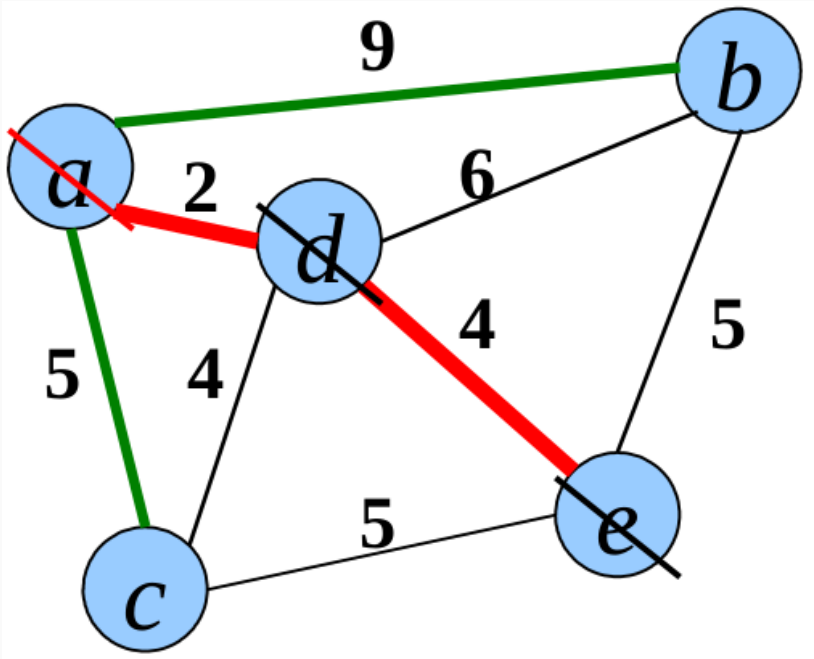


Figure 13: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

L'arête `d->c`

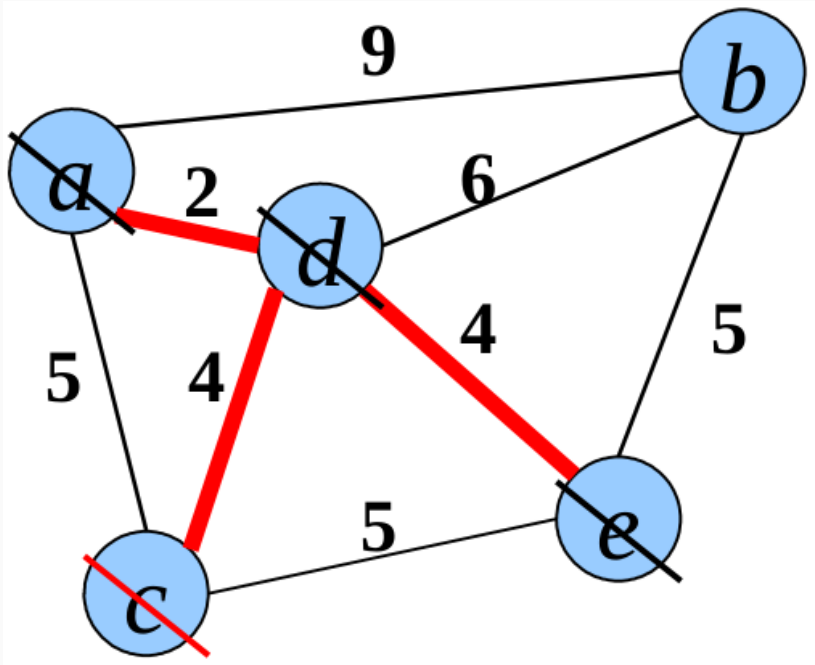


Figure 14: Le sommet `c` est couvert.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

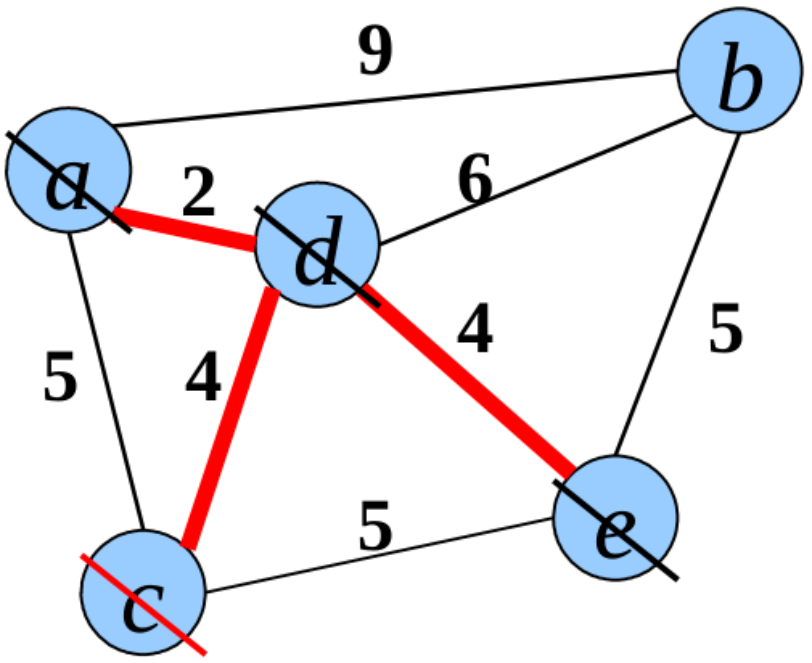


Figure 15: Quelle arête choisir?

Algorithme de Prim

On choisit comment?

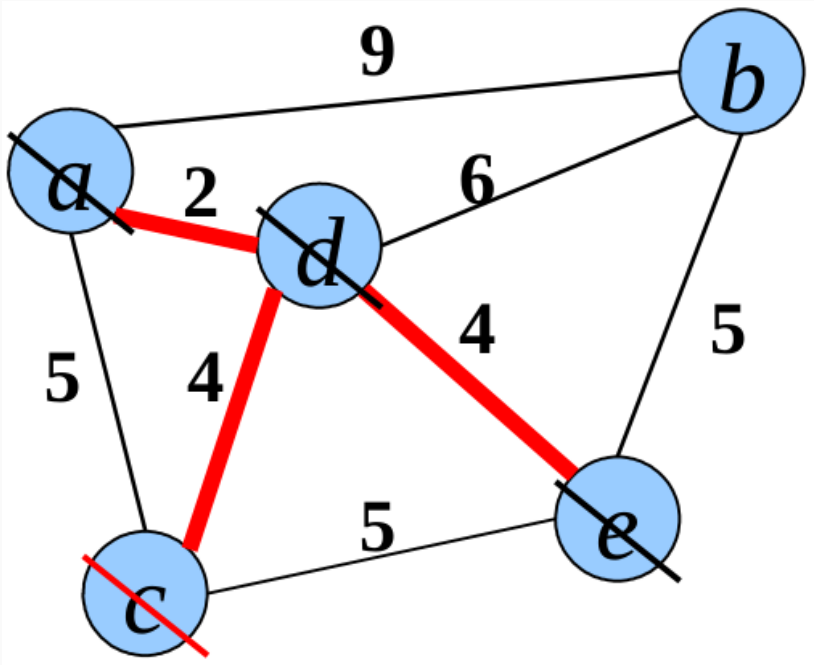


Figure 15: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

Algorithme de Prim

On choisit comment?

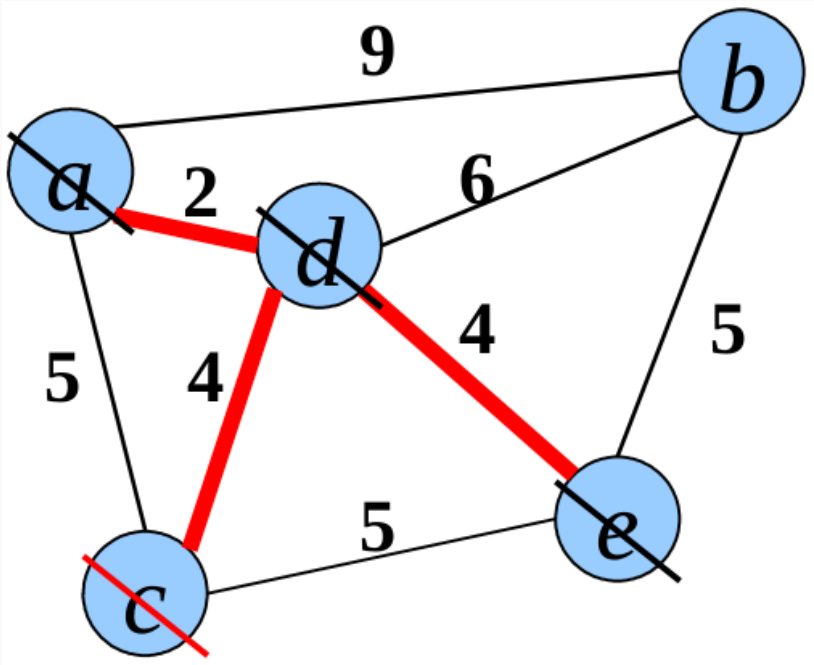


Figure 15: Quelle arête choisir?

- L'arête la plus courte sortant d'un sommet déjà visité, et entrant dans un sommet non-visité.

L'arête `e->b`

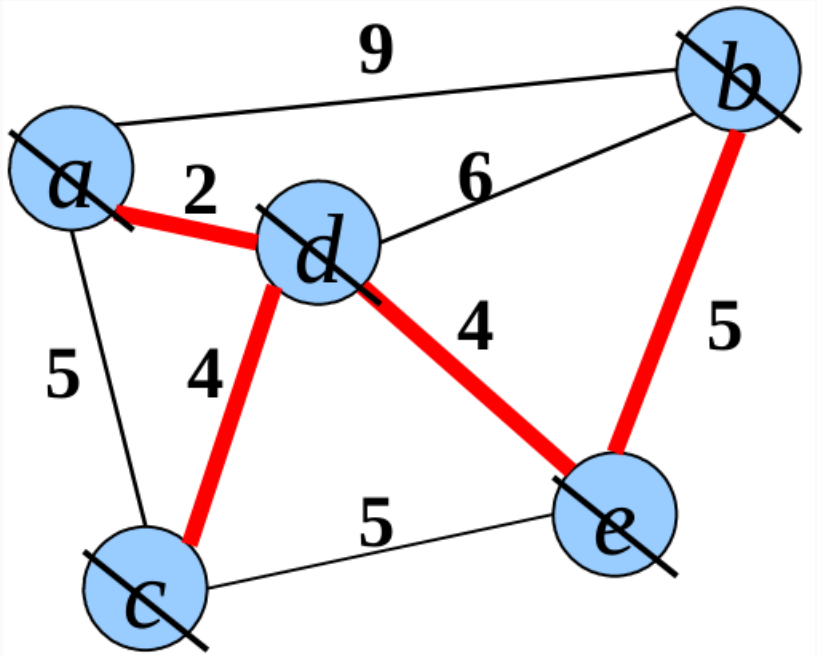


Figure 16: Le sommet `b` est couvert.

- Game over!

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

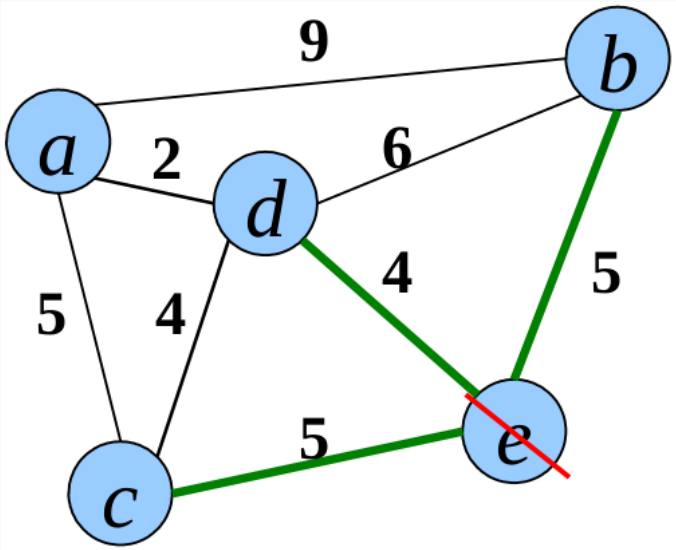


Figure 17: Étape 1.

FP	e	d	b	c	a
D	0	inf	inf	inf	inf
	e	d	b	c	a
P	-	-	-	-	-

Devient?

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

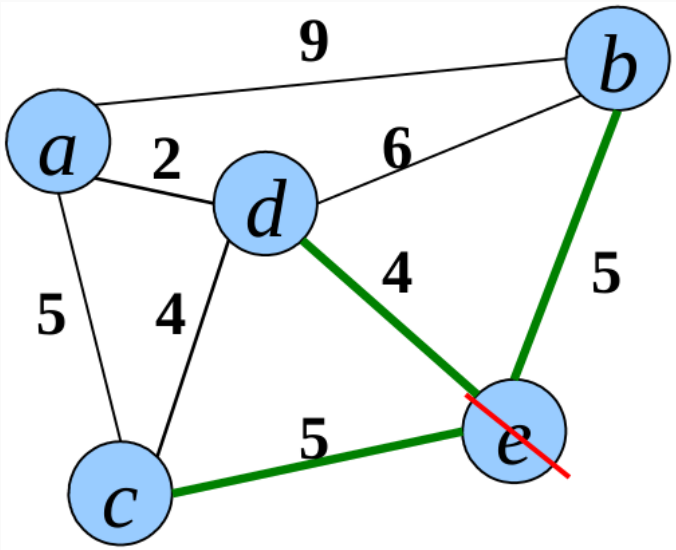


Figure 17: Étape 1.

FP	e	d	b	c	a
D	0	inf	inf	inf	inf
	e	d	b	c	a
P	-	-	-	-	-

Devient?

FP	d	b	c	a
D	4	5	5	inf
	e	d	b	c	a
P	-	e	e	e	-

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

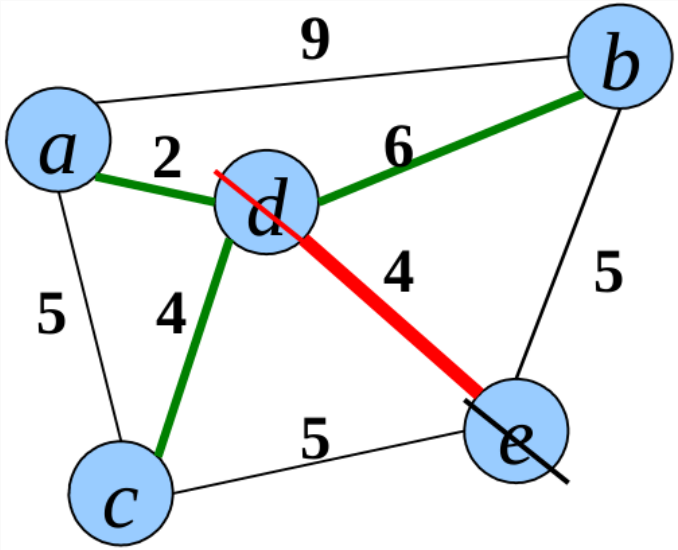


Figure 18: Étape 2.

FP	d	b	c	a
D	4	5	5	inf

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	e	-

Devient?

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

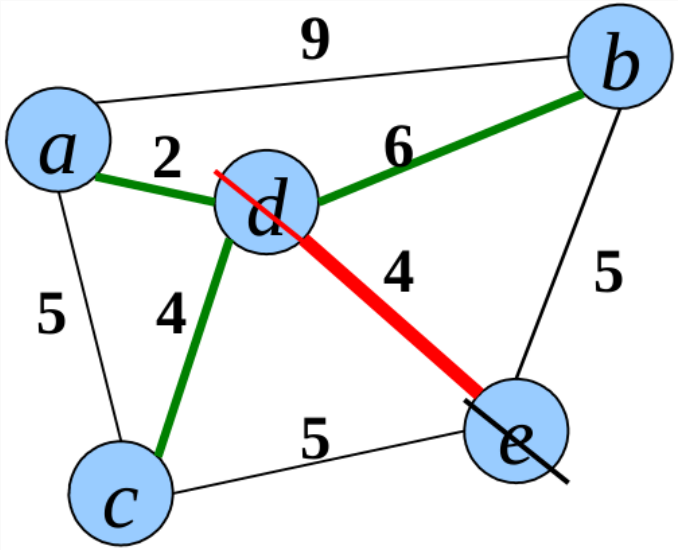


Figure 18: Étape 2.

FP	d	b	c	a
D	4	5	5	inf

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	e	-

Devient?

FP	a	c	b
D	2	4	5

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

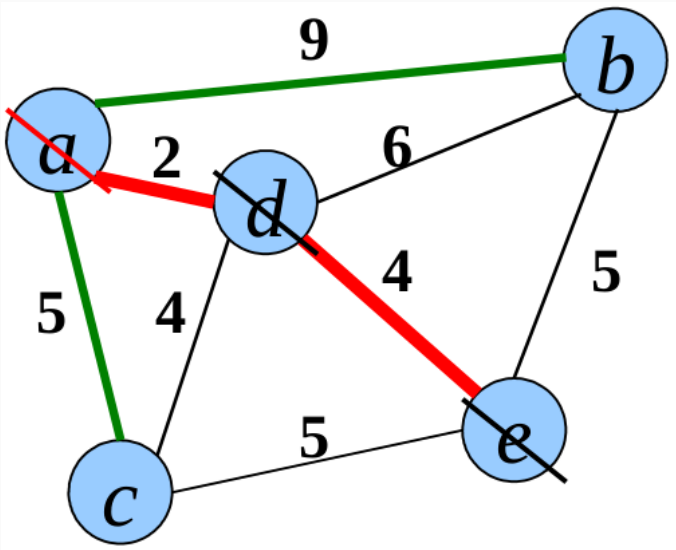


Figure 19: Étape 3.

FP	a	c	b		
D	2	4	5		
	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Devient?

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

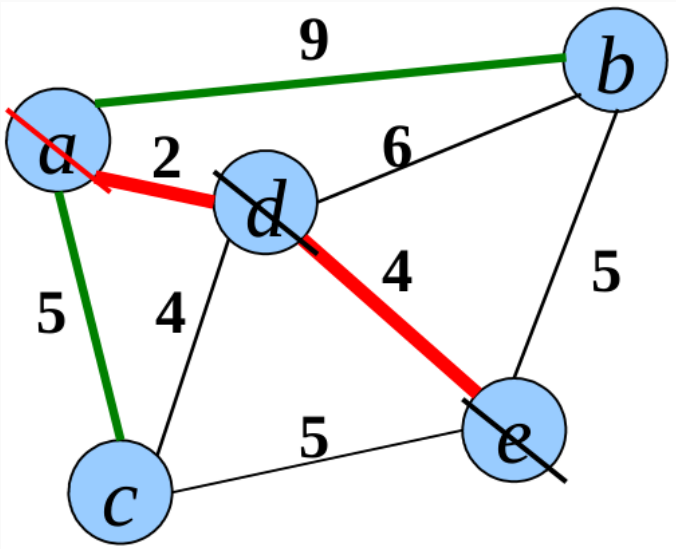


Figure 19: Étape 3.

FP	a	c	b	
D	2	4	5	

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Devient?

FP	c	b	
D	4	5	

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

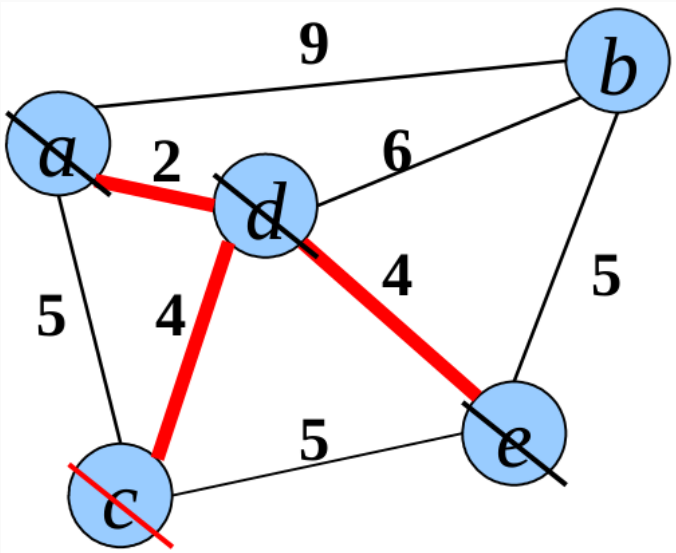


Figure 20: Étape 4.

FP	c	b				
D	4	5				
	e	d	b	c	a	
P	-	e	e	d	d	

Devient?

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

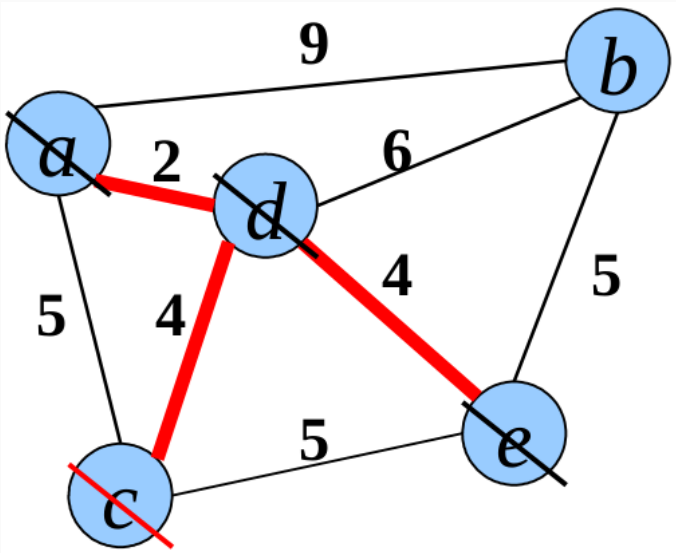


Figure 20: Étape 4.

FP	c	b	
D	4	5	

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Devient?

FP	b	
D	5	

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

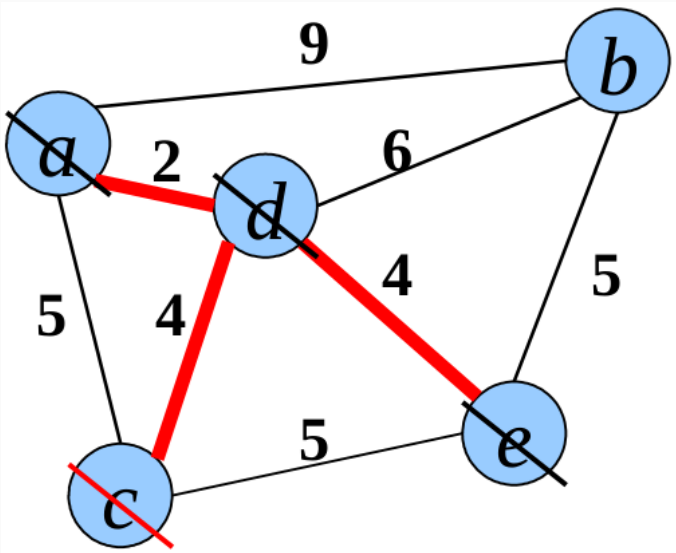


Figure 21: Étape 5.

```
FP |  b  |
----------
D  |  5  |

   |  e  |  d  |  b  |  c  |  a  |
-------------------------------------
P  |  -  |  e  |  e  |  d  |  d  |
```

Devient?

Exemple d'algorithme de Prim

Un exemple

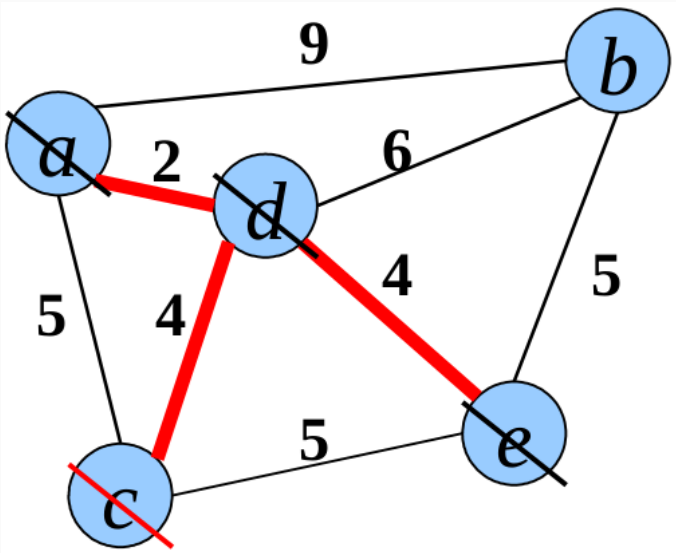


Figure 21: Étape 5.

FP	b
D	5

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Devient?

FP	
D	

	e	d	b	c	a
P	-	e	e	d	d

Algorithme de Prim

Structures de données

- Dans quoi allons nous stocker les sommets?

Algorithme de Prim

Structures de données

- Dans quoi allons nous stocker les sommets?
- File de priorité min.
- Autre chose?

Algorithme de Prim

Structures de données

- Dans quoi allons nous stocker les sommets?
- File de priorité min.
- Autre chose?
- Tableau des distances (comme pour Dijkstra).
- Autre chose?

Algorithme de Prim

Structures de données

- Dans quoi allons nous stocker les sommets?
- File de priorité min.
- Autre chose?
- Tableau des distances (comme pour Dijkstra).
- Autre chose?
- Tableau des parents (presque comme pour Dijkstra).
- Autre chose?

Algorithme de Prim

Structures de données

- Dans quoi allons nous stocker les sommets?
- File de priorité min.
- Autre chose?
- Tableau des distances (comme pour Dijkstra).
- Autre chose?
- Tableau des parents (presque comme pour Dijkstra).
- Autre chose?
- Non.

Algorithme de Prim

Initialisation: Pseudo-code (2min)

Algorithme de Prim

Initialisation: Pseudo-code (2min)

```
file_priorité, distance, parent initialisation(graphe)
    s_initial = aléatoire(graphe)
    distance[s_initial] = 0
    parent[s_initial] = indéfini
    fp = file_p_vide()
    pour s_courant dans sommets(graphe)
        si s_courant != s_initial
            distance[s_courant] = infini
            parent[s_courant]   = indéfini
        fp = enfiler(fp, s_courant, distance[s_courant])
    retourne fp, distance, parent
```

Algorithme de Prim

Algorithme: Pseudo-code (5min)

Algorithme de Prim

Algorithme: Pseudo-code (5min)

```
sommets, parent prim(file_priorité, distance, parent)
    sommets = vide
    tant que !est_vide(fp)
        s_courant, fp = défiler(fp)
        sommets = insérer(sommets, s_courant)
        pour s_voinsin dans voisinage(s_courant) et pas dans sommets
        // ou dans fp
            si poids(s_courant, s_voinsin) < distance[s_voinsin]
                parent[s_voinsin] = s_courant
                distance[s_voinsin] = poids(s_courant, s_voinsin)
                fp = changer_priorité(fp,
                    s_voinsin, poids(s_courant, s_voinsin))
    retourne sommets, parent
```

Exercice: algorithme de Prim

Appliquer l'algorithme de Prim à (15min):

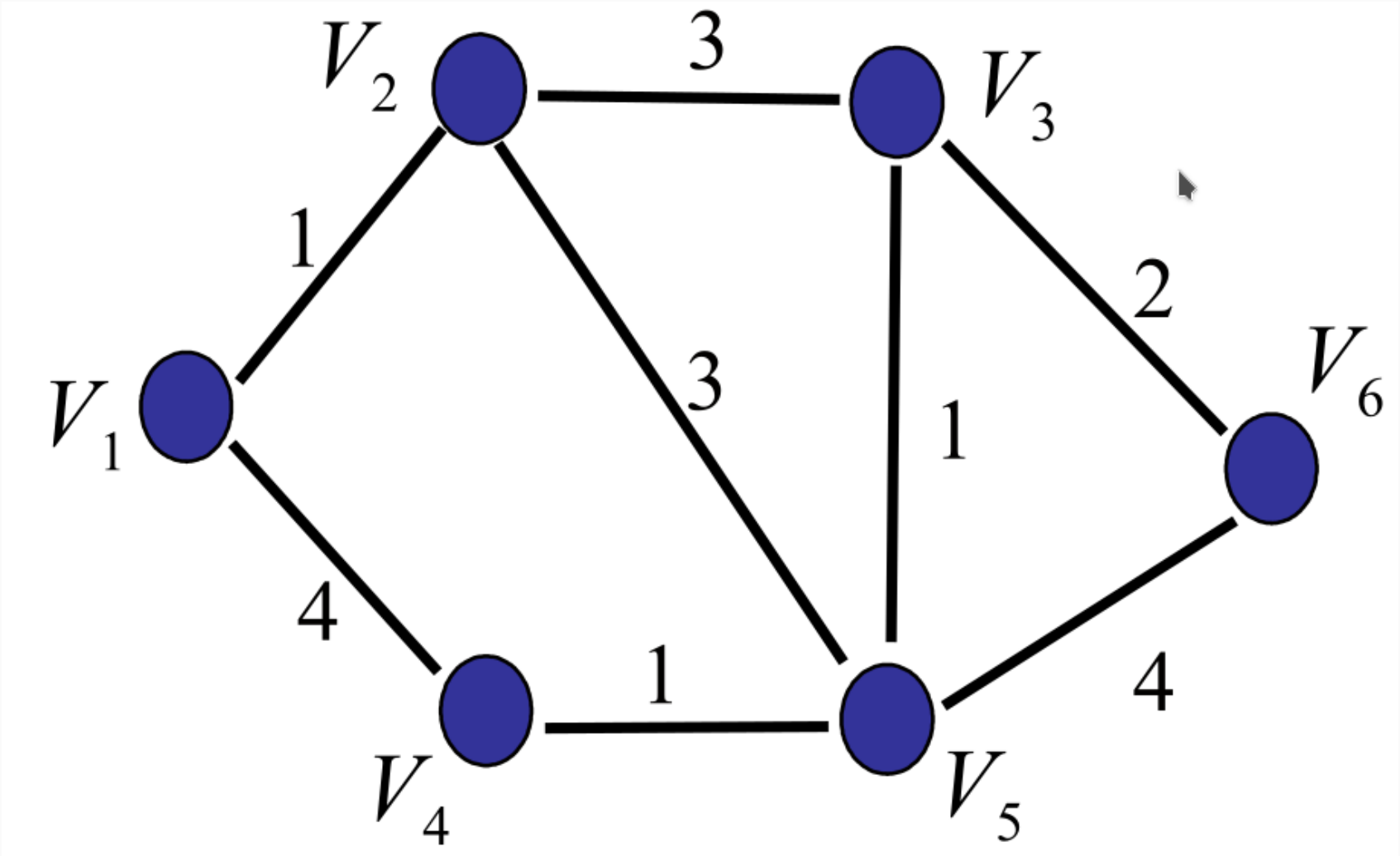
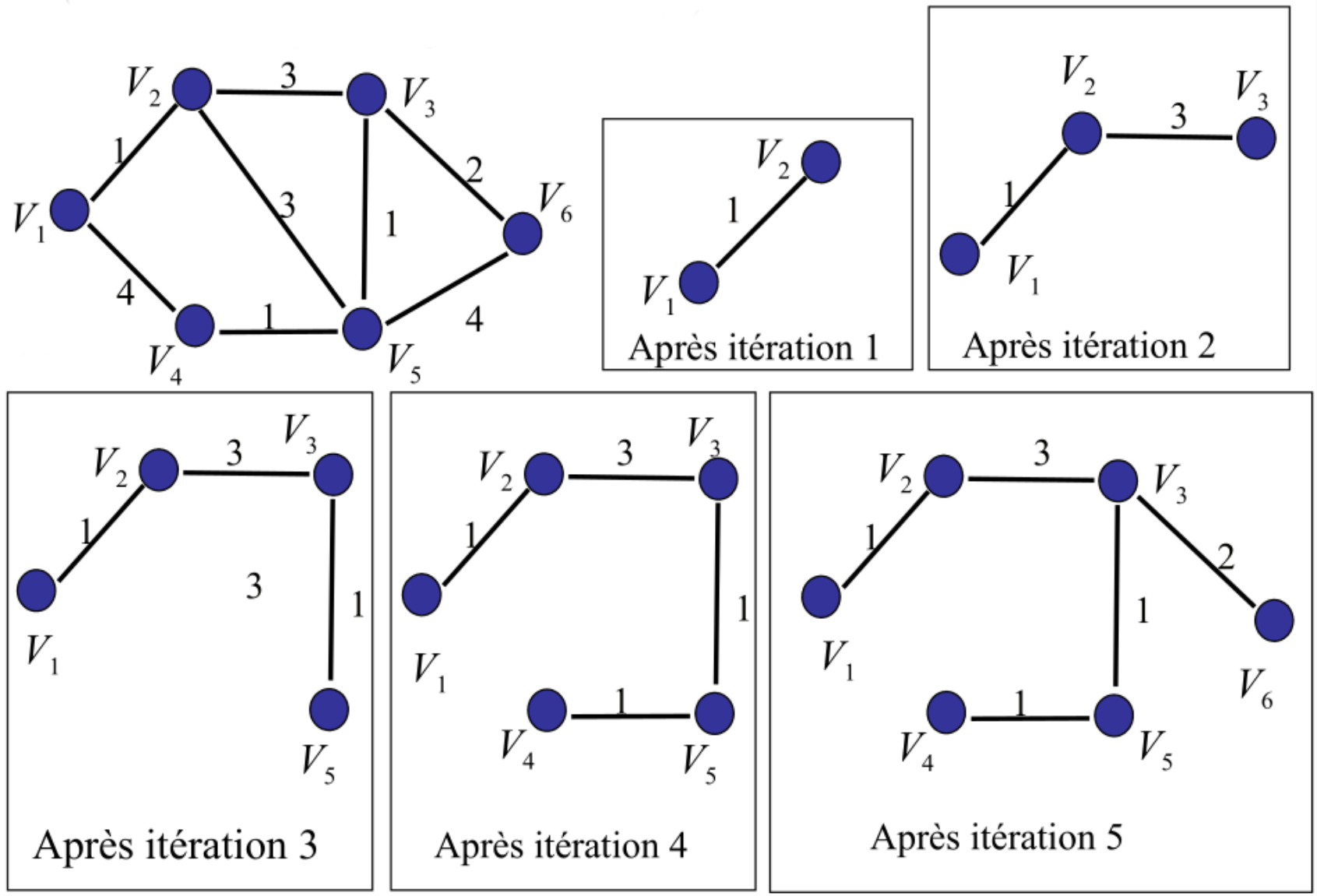


Figure 22: En démarrant du sommet V_1.

Exercice: algorithme de Prim

Solution



Complexité de l'algorithme de Prim

```
file_priorité, distance, parent initialisation(graphe)
    // choix r et initialisation
    pour v dans sommets(graphe)
O(|V|)  // initialisation distance et parent
        fp = enfiler(fp, v, distance[v])
    retourne fp, distance, parent
sommets, parent prim(file_priorité, distance, parent)
    sommets = vide
    tant que !est_vide(file_priorité)
O(|V|)  u, fp = défiler(file_priorité)
        sommets = insérer(sommets, u)
        pour v dans voisinage de u et pas dans sommets
    O(|E|)  si w(u, v) < distance[v]
                // màj dista + parent
        O(|V|)  fp = changer_priorité(fp, w, w(u, v))
    retourne sommets, parent
```

- $O(|V|) + O(|E|) + O(|V|^2) = O(|E| + |V|^2)$
- Remarque: $O(|E|)$ n'est pas mutliplié par $O(|V|)$, car les arêtes parcourues qu'une fois en **tout**.

Algorithme de Kruskal

- On ajoute les arêtes de poids minimal:
  - si cela ne crée pas de cycle;
  - on s'arrête quand on a couvert tout le graphe.

Algorithme de Kruskal

- On ajoute les arêtes de poids minimal:
  - si cela ne crée pas de cycle;
  - on s'arrête quand on a couvert tout le graphe.
- Comment on fait ça?

Algorithme de Kruskal

- On ajoute les arêtes de poids minimal:
  - si cela ne crée pas de cycle;
  - on s'arrête quand on a couvert tout le graphe.
- Comment on fait ça?
- Faisons un exemple pour voir.

Algorithme de Kruskal: exemple

Un exemple

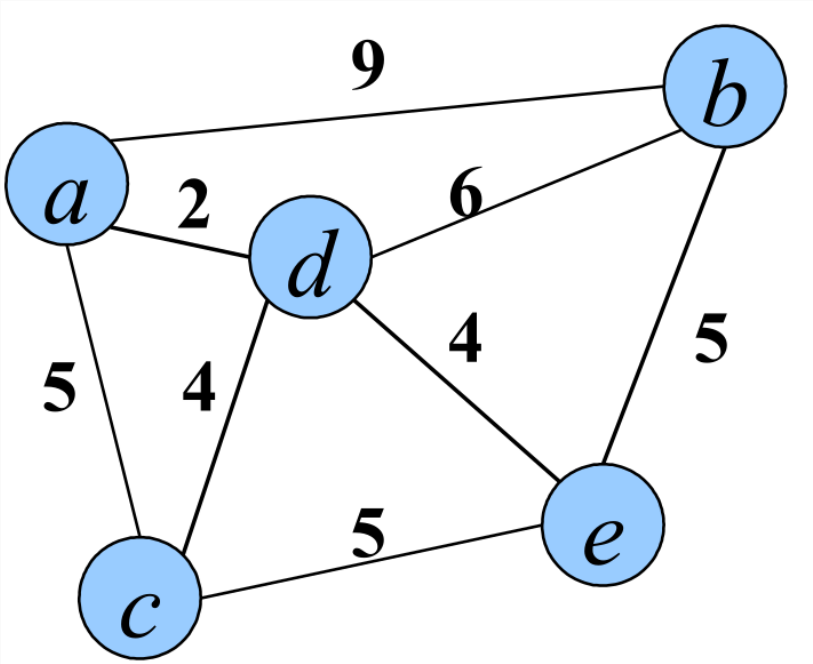


Figure 23: Le graphe de départ.

On part de `(a, d)` (poids le plus faible)

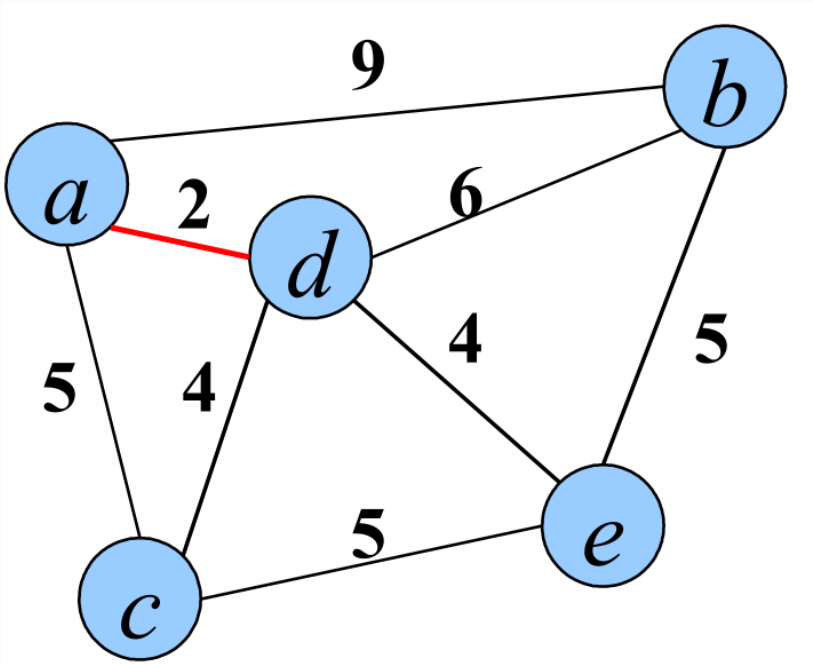


Figure 24: Les sommets `a, d` sont couverts.

Algorithme de Kruskal: exemple

On continue avec `(c, d)`

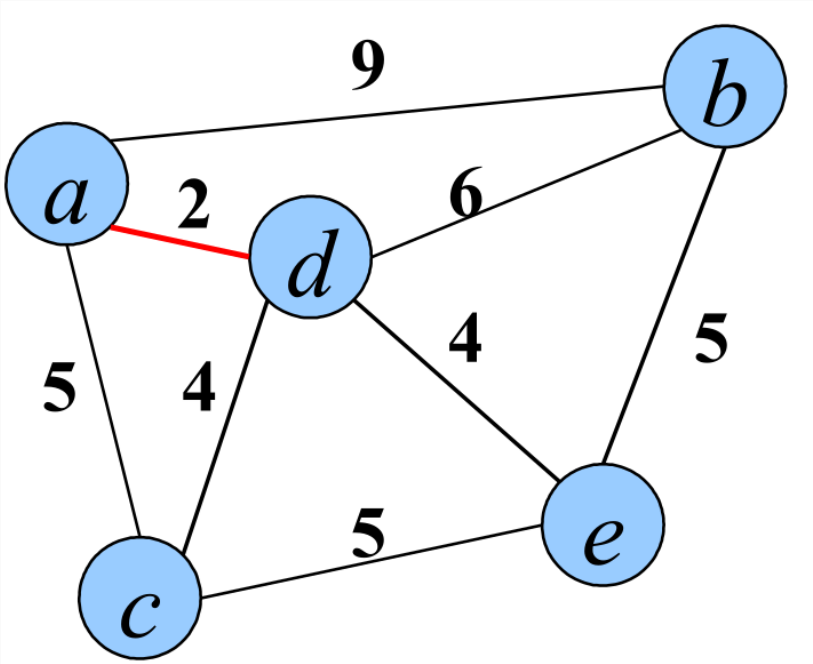


Figure 25: On aurait pu choisir `(d, e)` aussi.

Résultat

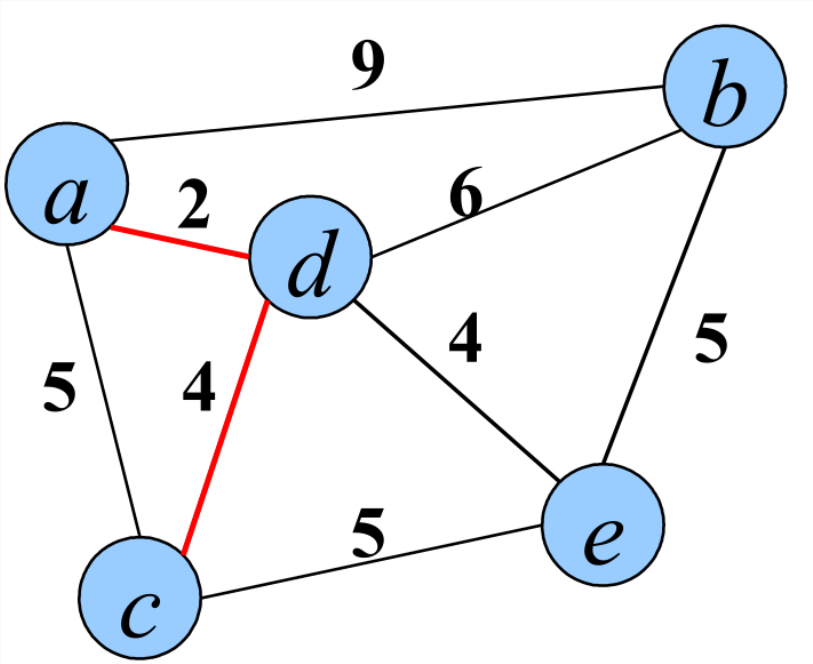


Figure 26: Les sommets `a, d, c` sont couverts.

Algorithme de Kruskal: exemple

On continue avec `(d, e)`

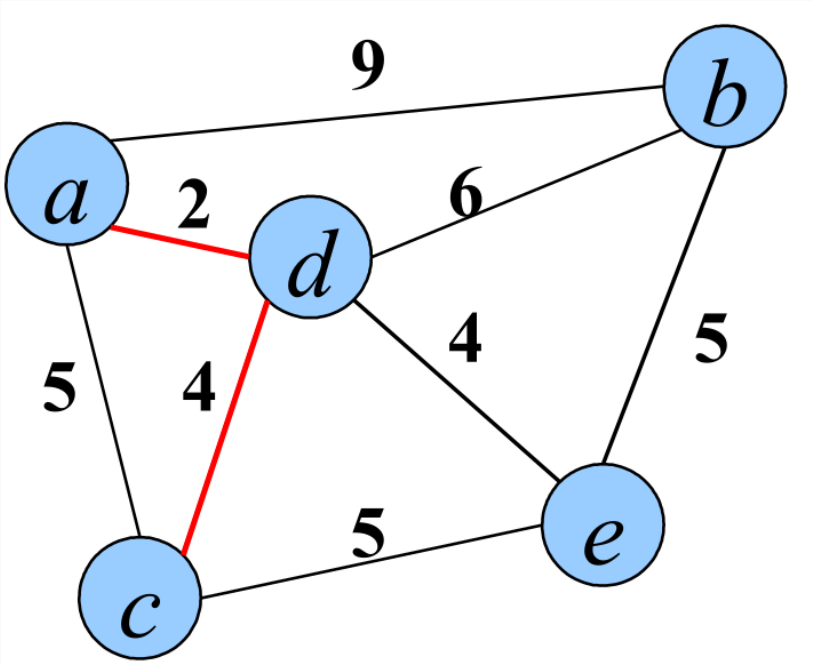


Figure 27: Le poids de `(d, e)` est le plus bas.

Résultat

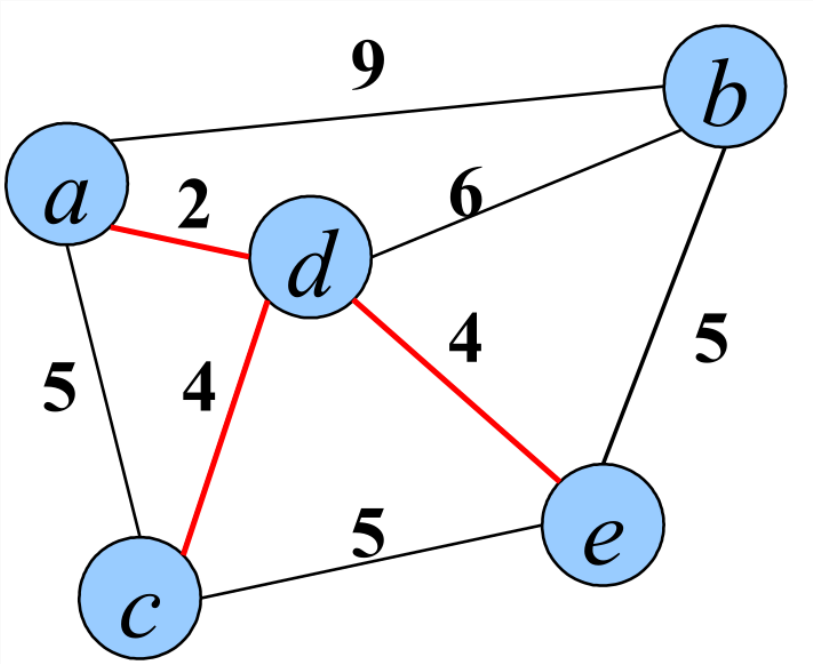


Figure 28: Les sommets `a, d, c, e` sont couverts.

Algorithme de Kruskal: exemple

On continue avec `(b, e)`

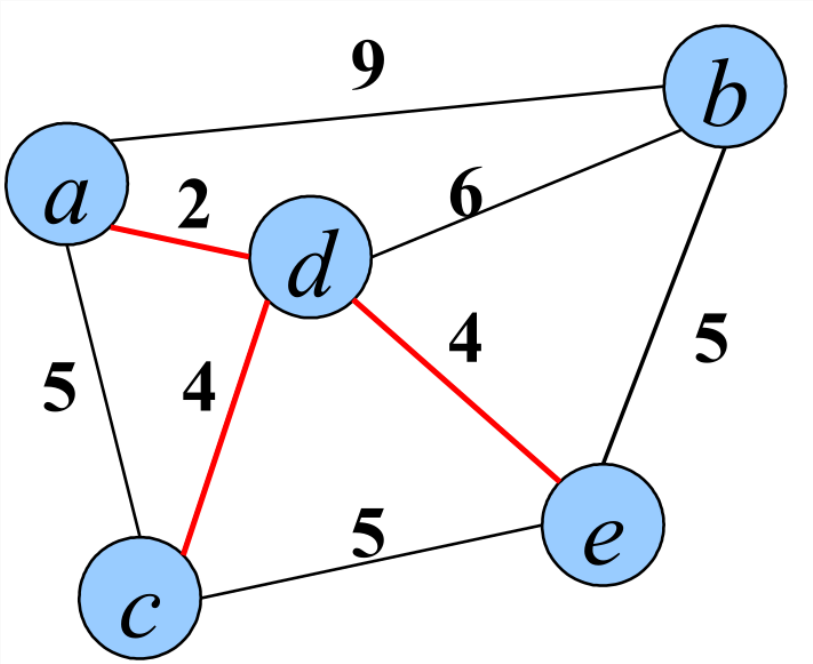


Figure 29: Le poids de `(b, e)` est le plus bas.

Résultat

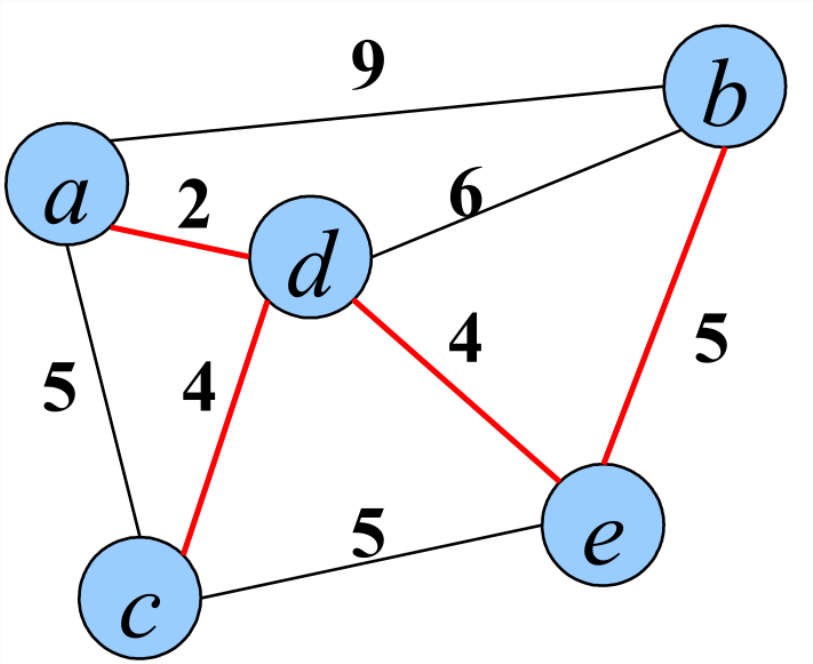


Figure 30: Les sommets `a, d, c, e, b` sont couverts.

Algorithme de Kruskal: exemple

Mais pourquoi pas `(c, e)`?

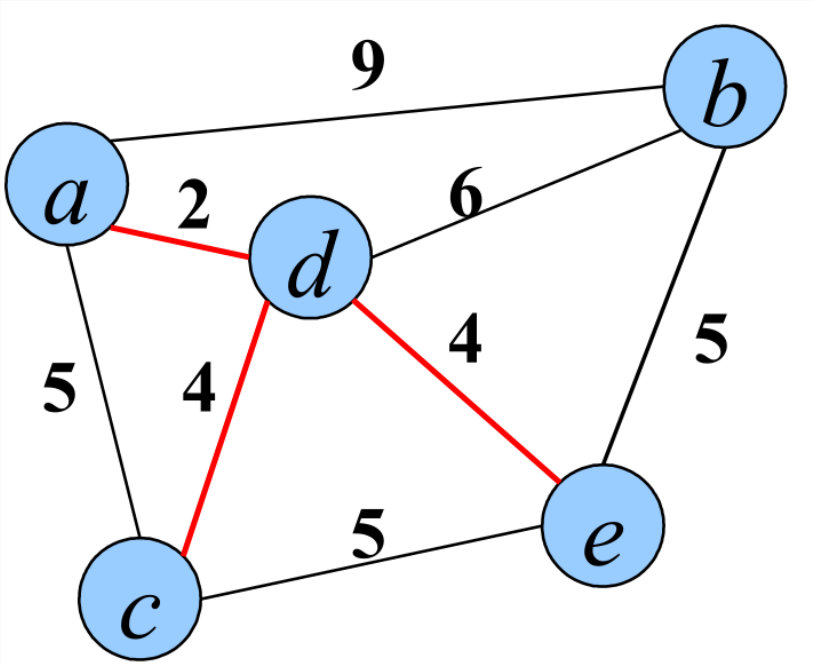


Figure 31: Le poids de `(b, e)` ou `(a,c)` est le même.

Résultat: un cycle

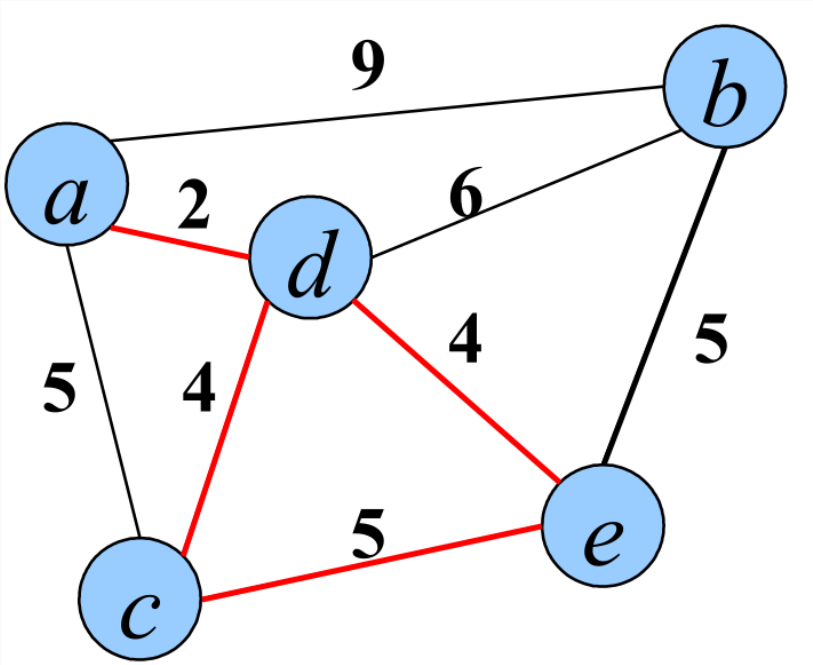


Figure 32: Les sommets `a, d, c, e` sont couverts.

- Comment faire pour empêcher l'ajout de `(c, e)` ou `(a, c)`?

Algorithme de Kruskal: exemple

Mais pourquoi pas `(c, e)`?

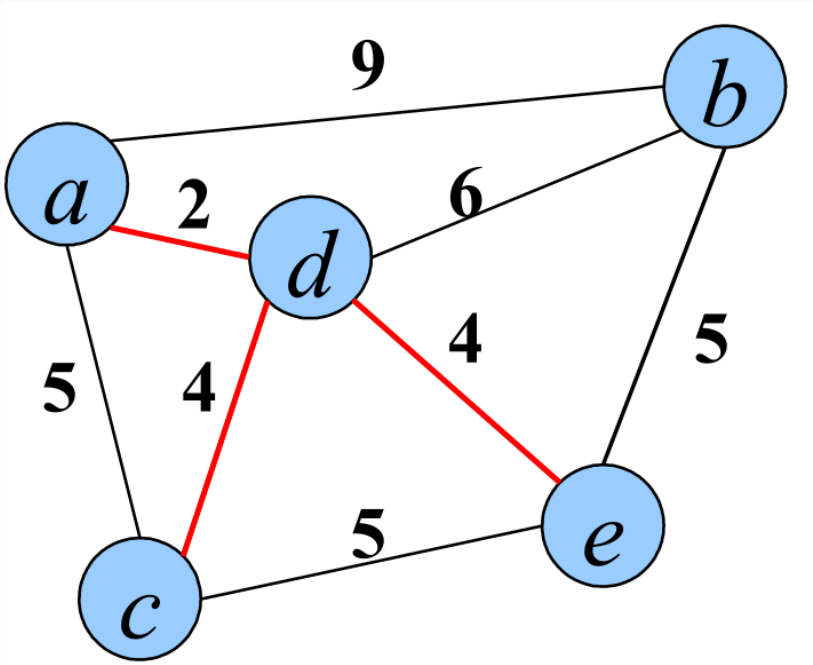


Figure 31: Le poids de `(b, e)` ou `(a,c)` est le même.

Résultat: un cycle

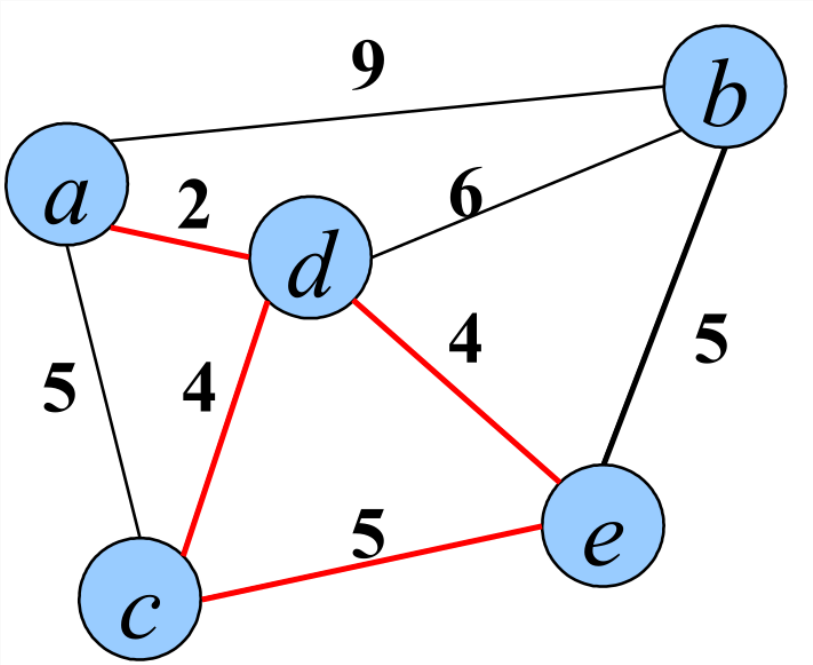


Figure 32: Les sommets `a, d, c, e` sont couverts.

- Comment faire pour empêcher l'ajout de `(c, e)` ou `(a, c)`?
- Si les deux sommets sont déjà couverts nous sommes sauvés (presque)!

Algorithme de Kruskal

L'initialisation

- Créer un ensemble de sommets pour chaque de sommet du graphe (V_1, V_2, ...):
  - $V_1 = \{v_1\}$, $V_2 = \{v_2\}$, ...
  - S'il y a n sommets, il y a n V_i.
- Initialiser l'ensemble A des arêtes "sûres" constituant l'arbre couvrant minimal, $A = \emptyset$.
- Initialiser l'ensemble des sommets couverts $F = \emptyset$
- Trier les arêtes par poids croissant dans l'ensemble E.

Mise à jour

- Tant qu'il reste plus d'un V_i:
  - Pour $(u, v) \in E$ à poids minimal:
  - Retirer (u, v) de E,
  - Si $u \in V_i$ et $v \in V_j$ avec $V_i \cap V_j = \emptyset$:
    - Ajouter (u, v) à A;
    - Fusionner u et v dans F.

Algorithme de Kruskal: exemple

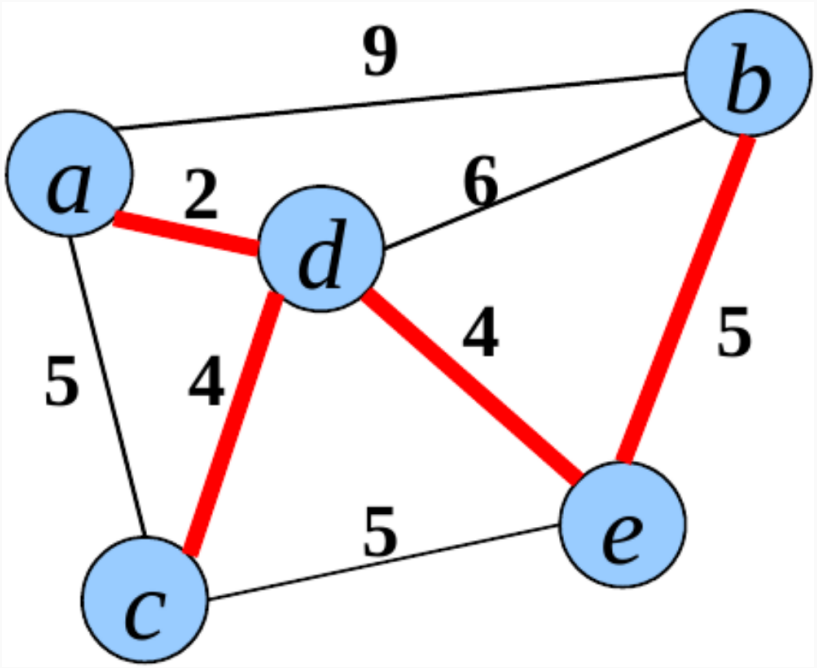
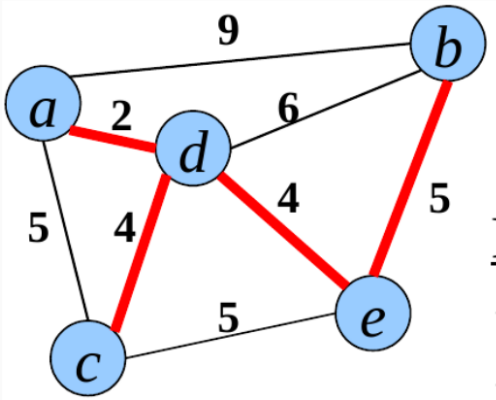


Figure 33: Couvrir cet arbre bon sang!

Algorithme de Kruskal: solution



$E = \{(a,d), (c,d), (d,e), (a,c), (b,e), (c,e), (b,d), (a,b)\}$

Forest	A
$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$	$\varnothing$
$\{a,d\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}$	$\{(a,d)\}$
$\{a,d,c\}, \{b\}, \{e\}$	$\{(a,d), (c,d)\}$
$\{a,d,c,e\}, \{b\}$	$\{(a,d), (c,d), (d,e)\}$
$\{a,d,c,e,b\}$	$\{(a,d), (c,d), (d,e), (b,e)\}$

Figure 34: La solution!

Algorithme de Kruskal: exercice

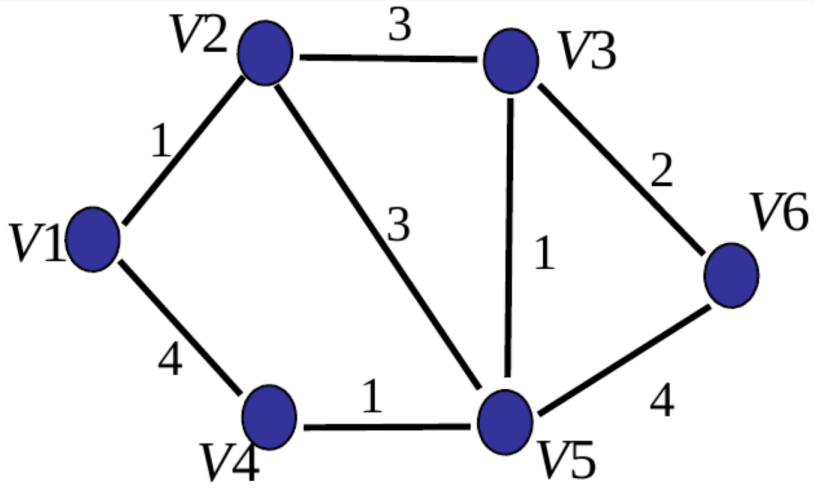


Figure 35: Couvrir cet arbre bon sang!

Algorithme de Kruskal: solution

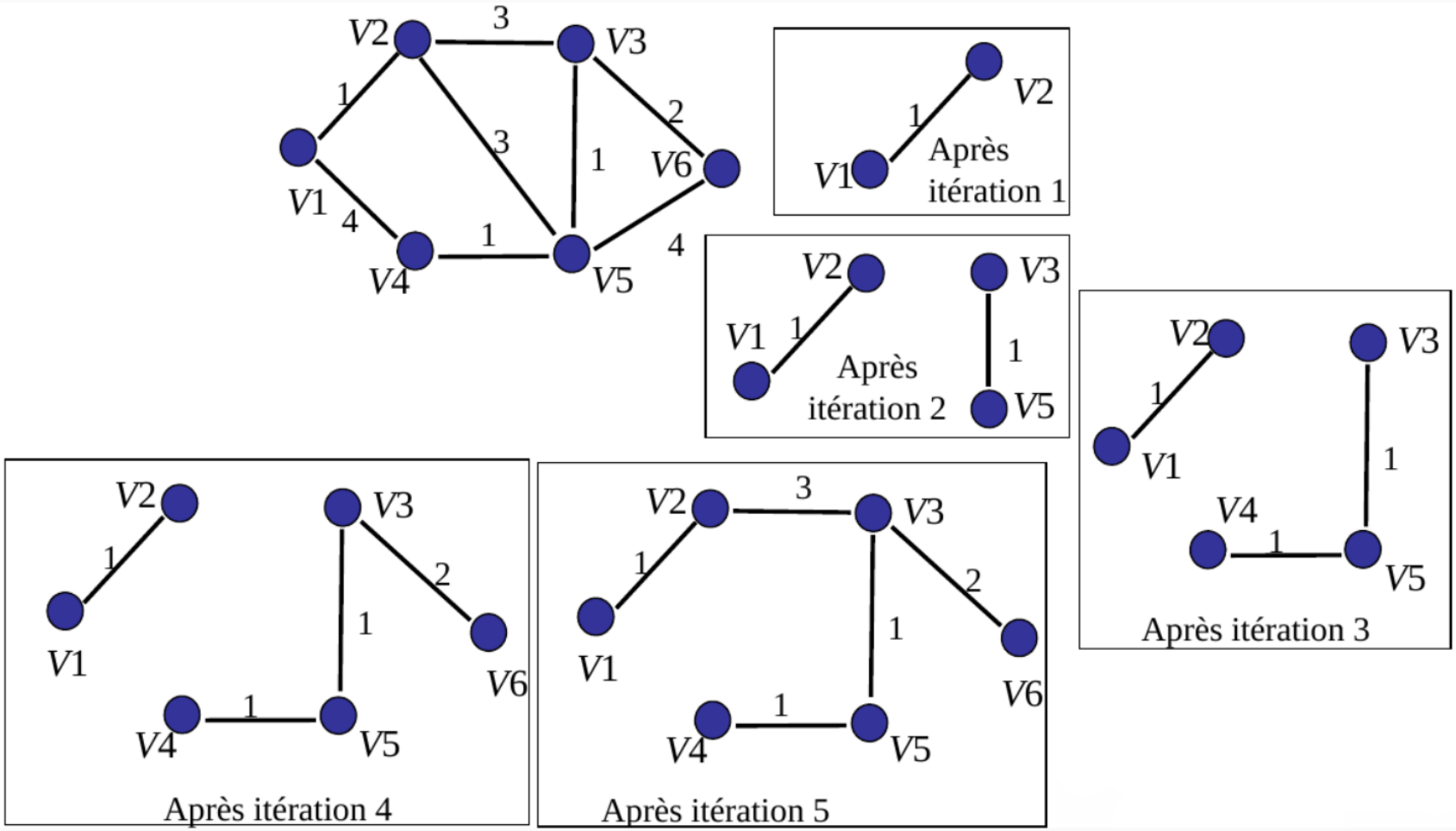


Figure 36: La solution!