Cours de programmation séquentielle

Calcul du zéros de fonction

1 Buts

— Introduction au langage C
— Utilisation des boucles et des branchements conditionnels
— Utilisation de variables et de fonctions

2 Énoncé

Écrire un programme permettant de calculer les zéros d'une fonction continue. Pour ce faire il faut utiliser la méthode de la bissection. L'utilisateur devra entrer en paramètres au programme les deux bornes entre lesquelles votre programme devra trouver le zéro. Dans un deuxième temps, vous pouvez implémenter une méthode plus générale permettant de déterminer un plus grand nombre de zéros de façon automatique.

3 Introduction théorique: la méthode de la bissection

Afin de déterminer le zéro d'une fonction, une des méthodes les plus simples est la méthode de la bissection. Il s'agit de choisir deux points, a_1 et b_1, $b_1 > a_1$, tels que le signe de $g(a_1)$ et $g(b_1)$ est différent. Si cela est le cas, nous sommes assurés de l'existence d'au moins un zéro si la fonction $g(x)$ est continue (en vertu du théorème de la valeur intermédiaire). Ensuite, nous allons calculer la valeur se situant "au milieu" entre a_1 et b_1

$$c_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}. \tag{1}$$

Puis, nous évaluons $g(c_1)$ et si ce n'est pas un zéro, nous en étudions son signe. Si le signe $g(c_1)$ est différent de celui de $g(a_1)$, nous remplaçons b_1 par c_1 et recommençons. Si le signe de $g(c_1)$ est différent de celui de $g(b_1)$, nous remplaçons a_1 par c_1. Nous itérons cette méthode jusqu'à ce que nous ayons atteint une valeur "suffisamment proche" de zéro. Une façon d'exprimer "proche" est de considérer la taille de l'intervalle $b_1 - a_1$ et de le comparer avec une précision $\varepsilon > 0$ que nous aurons choisie

$$b_1 - a_1 < \varepsilon. \tag{2}$$

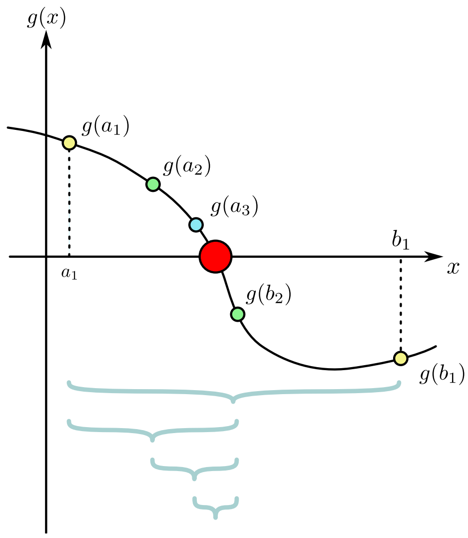

FIGURE 1: Illustration de la méthode de la bissection. Source: Wikipedia https://bit.ly/2RcljBW.

Dans le pire des cas, cette méthode nous rapproche de $(b_1 + a_1)/2$ du zéro à chaque itération. Après n itérations, nous sommes donc à une distance maximale du zéro, $d_{\max}$ est de

$$d_{\max} = (b_1 + a_1)/2^n. \tag{3}$$

---

4 Travail à réaliser

Considérons la fonction suivante

$$g(x) = x^5 + 2 * x^4 + x^3 + x^2 - 1. \tag{4}$$

Votre programme devra au minimum:

— Implémenter la fonction `g(x)`.

— Prendre en argument (à l'aide de `scanf()`) les bornes de l'intervalle dans lequel on veut calculer le zéro (`a1` et `b1` avec `a1 < b1`) ainsi que la tolérance `epsilon>0`.

— Vérifier que les arguments sont cohérents (`a1 < b1`, `epsilon > 0` et `sign(g(a1)) != sign(g(b1))`) et afficher un message d'erreur avant de quitter le programme si cela n'est pas le cas.

— Implémenter la fonction `bissect()` ayant la signature suivante:

```
int32_t bissect(double a1, double b1, double epsilon,
                double *zero);
```

qui assigne à `zero` la valeur du zéro déterminé à l'aide de la méthode de la bissection et retourne le nombre d'itérations nécessaires pour le trouver. Si le zéro n'a pas pu être trouvé (si par exemple `epsilon` est si petit qu'il faut un trop grand nombre d'itérations) la fonction retourne `-1` et `zero` contient la valeur du dernier "zéro" calculé.

En fonction des a_1, b_1 que vous avez choisis, vous devriez trouver un des trois zéros suivants

$$x = -1, \tag{5}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

4.1 Remarque

L'éq. 3 nous donne la distance maximale entre le zéro et notre approximation après n itérations de l'algorithme. Il est dès lors assez aisé de déterminer le nombre maximal nécessaire pour que l'algorithme converge pour une précision ε donnée:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (b_1 + a_1)/2^n, \\ 2^n &= (b_1 + a_1)/\varepsilon, \\ n &= \log_2((b_1 + a_1)/\varepsilon), \end{aligned} \tag{7}$$

où a_1 et b_1 sont les bornes de l'intervalle de départ.

Ainsi avec $a_1 = 0.5$, $b_1 = 1$ et $\varepsilon = 10^{-5}$, on a

$$n = \log_2(0.5 \cdot 10^5) = 15.6. \tag{8}$$

On a donc que $n \leq 16$ pour converger vers le zéro.

4.2 Méthodologie

Mettez vous par groupes de cinq et écrivez (à l'aide d'un papier et d'un crayon) le pseudo-code de toutes les fonctions que vous devez réaliser. Une fois que vous avez fini montrez votre pseudo-code à un enseignant (vous aurez le choix par ordre alphabétique entre Messieurs Albuquerque, Antoniadis, Gantel, Leblanc, ou Malaspinas).

5 Exercice supplémentaire

5.1 Méthode exhaustive

Quand vous aurez fini cette première partie, réfléchissez à un moyen pour calculer tous les zéros à l'aide d'un papier et d'un crayon (n'hésitez pas à réfléchir en groupe à ce problème). Une fois votre méthode mise au point montrez là à un enseignant et implémentez la.

5.2 Méthode de Newton

Il existe d'autres méthodes pour déterminer les zéros de fonctions. Une d'entre-elles est la méthode de Newton–Raphson (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method). Implémentez cette méthode et comparez les performances des deux façons de faire.