Simulations numériques en Physique

Physique, 2026-2027

Jonathan Lemus, Orestis Malaspinas

2026

Informatique et Systèmes de Communication, HEPIA

Simulations numériques

Objectif : Reproduire des phénomènes physiques à l'aide de **méthodes numériques** et des ordinateurs.

La recette générale est "simple" :

1) Définir le phénomène physique à reproduire
2) Emettre des hypothèses et simplifications
3) Mettre en équation mathématique le problème
4) Définir une stratégie algorithmique pour résoudre ces équations

Le tir de canon

Relève de la **balistique** : Discipline qui étudie le mouvement des projectiles.

1. Problème physique

- Tir de canon = projectile lancé dans les airs.
- Objectif = atteindre une cible **sans pilotage** durant le vol.
- $\Rightarrow$ Seules les **conditions initiales** du tir déterminent le point de chute.

Le tir de canon

2. Hypothèses et simplifications

- L'explosion de la poudre à canon fournit de l'énergie au projectile pour qu'il démarre.
- Il retombe sous l'effet de la gravité et peut également ralentir sous l'effet des frottements avec l'air.
- Le canon et la cible sont considérés comme **fixes**.
  - On néglige les frottements de l'air (comme si l'on était dans le vide).
  - Canon à puissance fixe
  - Boulet comme un objet ponctuel (on néglige donc les effets de forme)

En deux dimensions $\Rightarrow$ mouvement en deux composantes horizontale (selon x) et verticale (selon y).

Le tir de canon

3. Mise en équation

Objectif : connaître la position, la vitesse et l'accélération du projectile à tout instant t.

En 2D, on a donc :

- x la position horizontale et y la position verticale du boulet de canon
- v_x la vitesse horizontale et v_y la vitesse verticale
- a_x l'accélération horizontale et a_y l'accélération verticale

Le tir de canon

Sous les hypothèses enoncées il existe une solution **analytique** au problème. Le boulet ne subit que la gravité donc sont accélération est constante :

- $a_x = 0$ et $a_y = -g$

En *intégrant* les lois de Newton (à voir en détails lors du TP n°2), on déduit la vitesse :

- $v_x(t) = \cos(\alpha)v_0$ et $v_y(t) = -gt + \sin(\alpha)v_0$

En continuant l'intégration on a enfin la position :

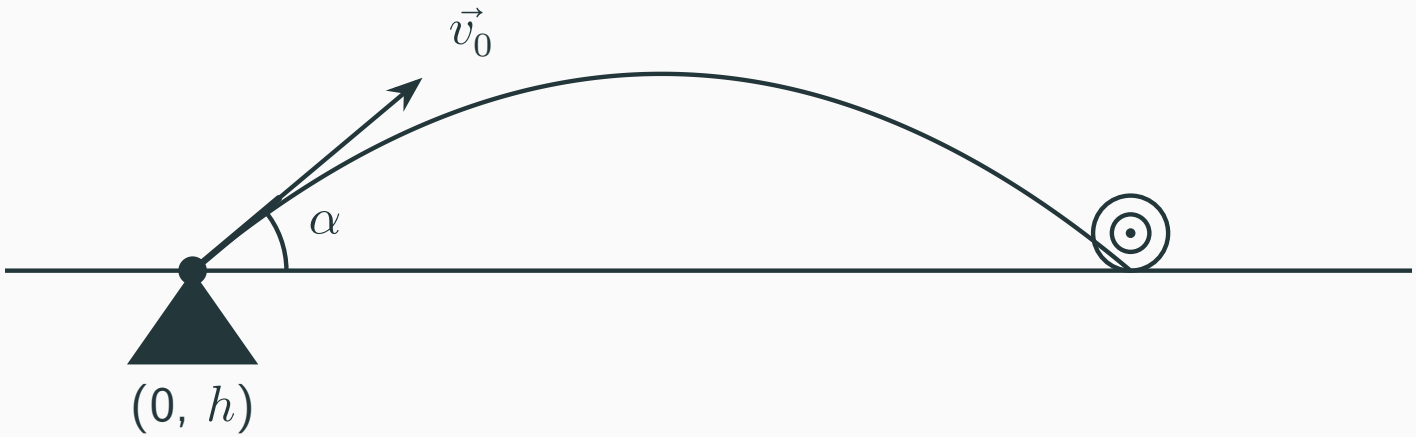
- $x(t) = \cos(\alpha)v_0 t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \sin(\alpha)v_0 t + h$

$\Rightarrow$ **Trajectoire parabolique**

Le tir de canon

Avec les variables :

- g : l'accélération de la pesanteur valant 9.81 m.s^{-2}
- α l'angle de tir initial
- v_0 la vitesse initiale du boulet m.s^{-1}
- h l'altitude du canon en m.



Le tir de canon

Angle de tir

- Canon à puissance fixe = vitesse initiale fixe $\Rightarrow$ trouver l'angle optimal pour atteindre la cible.
- On rappelle les équations horaires du projectile :

$$x(t) = \cos(\alpha) v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \sin(\alpha) v_0 t + h$$

- Supposons que $h = 0$, on peut déduire l'équation cartésienne dans le plan :

$$y(x) = -\frac{g}{2\cos^2(\alpha) v_0^2} x^2 + \tan(\alpha) x$$

- Cette équation permet de connaître **la hauteur du projectile en fonction de sa coordonnée horizontale**.

Le tir de canon

Angle de tir

- De l'équation cartésienne on peut trouver la distance horizontale maximale parcourue i.e. le x pour lequel $y(x) = 0$.
- Il faut donc calculer les racines du polynôme :

$$-\frac{g}{2\cos^2(\alpha)v_0^2}x^2 + \tan(\alpha)x$$

- On a donc logiquement comme solutions

$$x_1 = 0$$

et

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

Le tir de canon

Angle de tir

- Encore une logique implacable nous donne que x_1 est la coordonnée horizontale du canon et x_2 est la coordonnée horizontale du point d'impact au sol.
- En supposant (de façon intelligente) que la coordonnée horizontale de la cible est justement x_2, on peut inverser l'équation de x_2 pour trouver l'angle α optimal et donc :

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gx_2}{v_0^2}\right)$$

Le tir de canon

4. Stratégie numérique

- En simulation numérique, la continuité au sens mathématique du terme n'est pas assurée.
- Il faut **discrétiser** le temps et l'espace.
- On découpe le temps par petits pas de Δt :

- On calcul donc les positions du projectile pour chaque pas de temps : $x(\Delta t)$, puis $x(2\Delta t)$...

Algorithme de Verlet

- Dans la majeur partie des cas en sciences, il n'existe pas (encore) de solution analytique (i.e. que l'on peut résoudre à la main).
- Dans notre cas, c'est possible car on néglige les frottements. Les rajouter rendrait le problème difficile voire impossible à résoudre analytiquement.
- On utilise alors des méthodes numériques **itératives** permettant d'approximer "petits bouts par petits bouts" la solution des équations.

Algorithme de Verlet

- L'algorithme de Verlet est une de ces méthodes permettant de calculer la position du projectile.
- Cet algorithme se construit à partir de la combinaison de développements de Taylor (rendez-vous l'an prochain) à deux instants.

Algorithme de Verlet

- On va donc calculer la position future x_{n+1} (donc à l'instant $t + \Delta t$) en fonction des instants précédents x_n (à l'instant t) et x_{n-1} (à l'instant $t - \Delta t$).
- On a donc respectivement pour les coordonnées horizontale et verticale :

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_x \Delta t^2$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + a_y \Delta t^2$$

- On remarque ici que l'on n'a besoin que de l'accélération et de l'historique des positions.

Algorithme de Verlet

- Il y a néanmoins une subtilité pour la première itération (n=0). En effet, cela nécessiterait un temps négatif et d'avoir la position en x_{-1}.
- On amorce donc l'algorithme par un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$x_1 = x_0 + v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x\Delta t^2$$

$$y_1 = y_0 + v_{0,y}\Delta t + \frac{1}{2}a_y\Delta t^2$$