h e p i a

Haute école du paysage, d'ingénierie
et d'architecture de Genève

Le pendule simple

Orestis Malaspinas, Jonathan Lemus

2026

0.1 Introduction

La Physique est une science qui étudie par l'expérimentation et l'élaboration de concepts les propriétés fondamentales de la matière et de l'espace-temps. Ce n'est donc pas qu'une discipline permettant de construire des accélérateurs de particules, des bombes nucléaires ou juste de briller en société. Les concepts de la mécanique, de l'optique ou encore de l'électromagnétisme fournissent les briques de base afin de simuler numériquement des phénomènes souvent inaccessibles en laboratoire. Sans la Physique, pas de *Rocket League*, *Dragon Ball FighterZ* ou encore *Fortnite*. En effet, ces jeux vidéos tournent sous le moteur Unreal Engine, principal concurrent de Unity ou encore CryEngine. Ces moteurs de jeu vidéo, aussi puissants soient-ils, permettent une simulation de plus en plus fidèle à la réalité, grâce à l'intégration de principes physiques. A titre d'exemple, la mécanique permet de gérer les notions de mouvements alors que l'optique géométrique se concentrera sur les effets de *ray tracing*.

Sans prétention de créer un véritable moteur de jeu, l'objectif des travaux qui seront effectués durant l'année est d'appréhender des concepts physiques simples en les implémentant en C.

0.2 Le pendule simple

0.2.1 Votre mission

Le studio pour lequel vous avez développé le module de tir du chapitre précédent attaque un nouveau niveau: le héros doit s'accrocher à une liane et se balancer au-dessus du vide, et des pièges oscillants doivent traverser la scène. Dans les deux cas, le même objet physique se cache derrière l'animation: une masse suspendue à une tige (ou une corde) rigide, qui oscille autour d'un point fixe. C'est le **pendule simple**.

Une différence de taille avec le tir de canon vous attend. Pour le boulet, vous disposiez d'équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ qui donnaient directement la position à n'importe quel instant: la simulation ne faisait qu'évaluer une formule connue. Pour le pendule, **cette formule n'existe pas** sous forme élémentaire. La seule façon d'obtenir le mouvement est de le construire itérativement (frame par frame), à partir des forces. C'est précisément le principe d'un moteur physique.

Question directrice: une masse est accrochée au bout d'une tige rigide de longueur L et lâchée, sans vitesse initiale, depuis un angle θ_0. Comment animer son mouvement alors qu'aucune formule ne donne sa position en fonction du temps, et comment retrouver numériquement sa **période** d'oscillation?

Le mandat se décompose en cinq étapes, à traiter dans l'ordre:

1. poser les hypothèses physiques et le modèle géométrique du problème;
2. établir les équations du mouvement de la masse;
3. en déduire la période théorique du pendule aux petits angles;
4. implémenter et animer le pendule en C;
5. valider la simulation en mesurant la période et en surveillant les quantités conservées.

0.2.2 Livrable et critères de réussite

À la fin de ce projet, vous devez remettre un programme C (basé sur le squelette fourni) qui, une fois compilé avec le `Makefile` donné:

- ouvre une fenêtre *gfx* et y dessine, avec l'API *gfx*, l'axe, la tige, la masse et la traînée laissée par la masse;
- calcule à chaque pas de temps l'accélération de la masse comme la somme du poids et de la tension de la tige, cette dernière étant déduite de la contrainte de tige rigide;
- fait avancer la masse par **intégration de Verlet**, en travaillant en unités SI puis en convertissant en pixels uniquement pour l'affichage;
- mesure la période d'oscillation pendant la simulation et l'affiche à côté de la période théorique $2\pi\sqrt{L/g}$ (pour des petits angles);
- affiche la variation maximale de l'énergie (par rapport à l'énergie initiale) et celle de la longueur de la tige, et vous permet de commenter l'influence du pas de temps Δt;

0.2.3 Étape 1: Contexte, hypothèses et modèle géométrique

Un pendule simple est une masse accrochée à un axe fixe par une tige, et lâchée hors de sa position d'équilibre. Elle se met alors à osciller de part et d'autre de la verticale, indéfiniment si rien ne la freine.

Avant de continuer, posez-vous les questions suivantes (elles conditionnent tout le reste du projet):

- Quelles forces agissent sur la masse? Le poids, bien sûr, mais qu'est-ce qui l'empêche de tomber verticalement comme le boulet de canon?
- La tige a-t-elle une masse? Est-elle élastique ou parfaitement rigide?
- Y a-t-il des frottements? Lesquels? Que se passe-t-il si on les néglige?
- Le mouvement se fait-il vraiment dans un plan? Combien de nombres faut-il pour décrire complètement l'état du pendule à un instant donné?

Pour ce projet, on retient les hypothèses suivantes: le mouvement se fait en deux dimensions dans le plan (x, y), la masse est **ponctuelle** de masse m, la tige est **rigide et sans masse** de longueur L, l'axe est **fixe**, et tous les frottements sont négligés.

Modèle géométrique. Notons $o = (x_o, y_o)$ la position de l'axe et $p = (x, y)$ celle de la masse. La tige étant rigide, la distance entre les deux ne change jamais:

$$||\vec{p} - \vec{o}|| = L$$

Elle signifie que la masse ne se déplace pas librement dans le plan: elle doit rester sur le cercle de centre o et de rayon L. Un seul nombre suffit donc à décrire sa position: l'angle θ que fait la tige avec la verticale descendante,

$$x = x_o + L\sin\theta, \qquad y = y_o - L\cos\theta.$$

On lâche la masse sans vitesse initiale depuis l'angle θ_0, ce qui fixe les conditions initiales de la simulation.

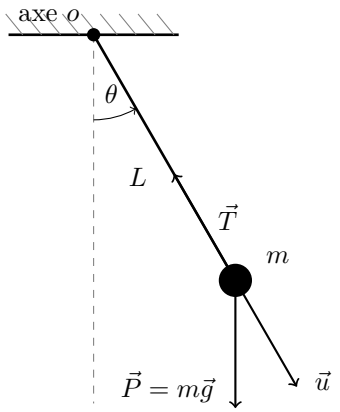

Figure 1: Le pendule simple: la masse m est fixée à la tige de rayon L qui a son autre extrémité sur l'axe o. Elle subit son poids $\vec{P}$ et la tension $\vec{T}$ de la tige, dirigée le long de la tige vers l'axe. Le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur unitaire radial sortant.

0.2.4 Étape 2: Mettre le mouvement en équations

La masse subit deux forces (figure 1): son **poids** $\vec{P} = m\vec{g}$, avec $\vec{g} = (0, -g)$ et $g = 9.81$ m/s^2, et la **tension** $\vec{T}$ de la tige. Cette dernière est toujours dirigée le long de la tige, de la masse vers le pivot. En introduisant le vecteur unitaire radial **sortant**

$$\vec{u} = \frac{\vec{p} - \vec{o}}{L},$$

on peut donc écrire $\vec{T} = -T \cdot \vec{u}$, où $T \geq 0$ est l'intensité de la tension. La seconde loi de Newton donne alors

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a} = \vec{g} - \frac{T}{m}\vec{u}.$$

Le problème est que **l'intensité T est inconnue**: contrairement au poids, elle n'est pas donnée (comme pour la gravité) par une formule simple. En fait, elle s'ajuste à chaque instant, exactement à la valeur qu'il faut pour que la tige garde sa longueur (la tige est parfaitement rigide et ne peut ainsi ni s'allonger, ni se contracter).

0.2.4.1 L'équation cartésienne

Le pendule suit un mouvement circulaire, ainsi on peut appliquer ce que l'on connaît sur ce type de mouvements. Les lois de Newton nous donnent:

$$\vec{a} = \vec{g} - (T/m)\vec{u}$$

et on doit déterminer T/m pour pouvoir calculer $\vec{a}$ et l'utiliser dans l'équation de Verlet.

L'astuce consiste à traduire la contrainte de tige rigide en une condition sur l'accélération. Un point qui se déplace sur un cercle de rayon L à la vitesse $\vec{v}$ possède une accélération **centripète**, c'est-à-dire dirigée vers le centre, de norme v^2/L (où v est la vitesse de l'objet). Autrement dit, la composante radiale de son accélération vaut

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = -\frac{v^2}{L}, \qquad \text{avec } v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Il ne reste qu'à projeter la seconde loi de Newton sur $\vec{u}$ (en se rappelant que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$):

$$\vec{g} \cdot \vec{u} - \frac{T}{m} = -\frac{v^2}{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T}{m} = \frac{v^2}{L} + \vec{g} \cdot \vec{u}.$$

La tension est donc entièrement déterminée par la position et la vitesse courantes. En remplaçant dans l'équation de Newton, on obtient l'accélération en composantes:

$$a_x = -\frac{T}{m}u_x, \qquad a_y = -g - \frac{T}{m}u_y, \qquad \text{avec } (u_x, u_y) = \left(\frac{x - x_o}{L}, \frac{y - y_o}{L}\right).$$

Ce sont ces deux lignes que vous coderez dans la fonction `acceleration()` du squelette. Vérifiez qu'elles ont un sens: au repos au point le plus bas, on a $\vec{u} = (0, -1)$ et $v = 0$, donc $T/m = g$ et $\vec{a} = \vec{0}$. La tige tire bien vers le haut avec exactement le poids, et le pendule ne bouge pas.

0.2.5 Étape 3: Trouver la période du pendule

Pour de petits angles la période du pendule d'oscillation du pendule est de

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Prenez le temps de mesurer ce que dit cette formule, car c'est un résultat contre-intuitif:

- la période **ne dépend pas de la masse** (déjà vu à l'étape 2);
- elle **ne dépend pas non plus de l'amplitude** θ_0 (l'angle depuis lequel on lâche le pendule): un pendule lâché de haut va plus vite, mais parcourt aussi plus de chemin, et les deux effets se compensent exactement.
- elle dépend uniquement de la longueur et de la gravité, en $\sqrt{L/g}$: pour doubler la période, il faut une tige **quatre fois** plus longue.

Calculez la valeur de τ pour $L = 1$ m et $g = 9.81$ m/s^2: vous devez trouver environ 2.006 s. C'est le nombre auquel vous comparerez la période mesurée par votre programme à l'étape 5, et c'est aussi ce qui fixe la durée de simulation `MAX_T` du squelette (une dizaine de périodes).

0.2.6 Étape 4: Implémenter en C

Vous disposez maintenant de tout ce qu'il faut pour animer le pendule. Comme pour le tir de canon, le temps est discrétisé: on part de $t_0 = 0$ et on avance par pas de Δt. Mais cette fois, au lieu d'évaluer une formule horaire, vous allez faire avancer la position à partir de l'accélération, avec l'**intégration de Verlet** déjà rencontrée à l'étape 5 du TP précédent:

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_x\Delta t^2, \qquad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + a_y\Delta t^2,$$

amorcée, puisqu'elle a besoin de deux positions successives, par

$$x_1 = x_0 + v_{x,0}\Delta t + \frac{1}{2}a_{x,0}\Delta t^2, \qquad y_1 = y_0 + v_{y,0}\Delta t + \frac{1}{2}a_{y,0}\Delta t^2.$$

La différence avec le canon, c'est que a_x et a_y ne sont plus des constantes: il faut les **recalculer à chaque itération** avec la formule de l'étape 2, à partir de la position et de la vitesse courantes.

Un piège à connaître. L'accélération dépend de v^2 à travers la tension, or la formule de Verlet ne manipule que des positions: elle ne vous donne aucune vitesse. Il faut donc l'estimer, et le plus simple est de la reconstruire à partir des deux dernières positions:

$$\vec{v}_n \simeq \frac{\vec{p}_n - \vec{p}_{n-1}}{\Delta t}.$$

Vous avez à disposition un squelette de code dans le fichier *pendulum.c* à partir duquel vous devrez implémenter les parties manquantes. Les constantes, les fonctions de conversion mètres → pixels et tout le code d'affichage (traînée, tige, pivot, masse) vous sont donnés; les emplacements à compléter sont signalés par des commentaires `TODO`:

- les conditions initiales: position de la masse lâchée sans vitesse depuis l'angle `THETA1`;

- le corps de la fonction `acceleration()`, avec les formules de l'étape 2;
- le corps de la fonction `exact_period()`, avec la formule de l'étape 3;
- l'amorçage de Verlet, puis la boucle qui, à chaque pas de temps, estime la vitesse, calcule l'accélération et fait avancer la position;
- les contrôles de l'étape 5 et leur affichage en fin de programme.

Remarque: comme au chapitre précédent, tous les calculs se font dans les unités du système international (mètre, seconde, kilogramme). La conversion vers des positions de pixels ne sert qu'à l'affichage; ici elle vous est fournie par les fonctions `x_to_column()`, `y_to_row()` et `length_to_pixels()`. Enfin, on ne redessine pas la scène à chaque pas de temps (le pas est bien trop petit): l'affichage n'a lieu qu'une itération sur `SHOW_ITER`.

0.2.7 Étape 5: Retrouve-t-on la dynamique du pendule (sa période théorique)?

Votre pendule oscille à l'écran, et l'animation a l'air convaincante. Mais "avoir l'air convaincant" n'est pas un critère physique: une simulation fausse peut être très jolie. Il faut donc **mesurer** quelque chose et le comparer à une valeur connue. Vous allez ajouter trois contrôles à votre programme.

Contrôle 1: la période. Le pendule passe par le point le plus bas deux fois par période (une fois dans chaque sens). Vous pouvez détecter ces passages en surveillant le **changement de signe** de $x - x_o$ d'une itération à l'autre. Comme l'instant exact du passage tombe presque toujours entre deux pas de temps, on peut essayer d'en trouver une approximation convaincante. En comptant n passages entre le premier instant t_{premier} et le dernier t_{dernier}, la période vaut

$$T_{\text{mesurée}} = \frac{2(t_{\text{dernier}} - t_{\text{premier}})}{n-1}.$$

On calcule ainsi la moyenne des temps de passage, améliorant la précision de nos résultats.

Affichez-la à côté de $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$ et comparez, en vous souvenant que si θ_0 n'est pas très petit, la période déviera un peu de la formule théorique.

Contrôle 2: l'énergie. Aucun frottement n'agit sur le pendule et la tension, toujours perpendiculaire au déplacement, ne travaille pas. L'énergie mécanique doit donc rester **constante** au cours du temps:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(y - y_o).$$

Calculez-la à chaque itération et gardez la trace de l'écart maximal $|E - E_0|$ par rapport à sa valeur initiale.

Contrôle 3: la longueur de la tige. Rien, dans le schéma de Verlet, ne garantit que la contrainte $||\vec{p} - \vec{o}|| = L$ soit respectée: elle n'a été utilisée que pour calculer la tension. Surveillez donc l'écart maximal $|||p - o|| - L|$. Si la masse "s'échappe" lentement de son cercle, c'est le signe que le pas de temps est trop grand ou qu'une formule est fausse.

Une fois ces trois indicateurs en place, faites des expériences et commentez vos résultats:

- faites varier le pas de temps ($\Delta t = 10^{-3}$, 10^{-4}, 10^{-5} s) et observez comment les variations d'énergie et de longueur évoluent. Que gagne-t-on en diminuant Δt? Que perd-on?
- faites varier l'angle de lâcher `THETA1` (quelques degrés, puis $\pi/3$) et comparez à chaque fois la période mesurée à $2\pi\sqrt{L/g}$.

Cette démarche (mesurer une grandeur, la comparer à une valeur théorique connue, surveiller les quantités qui devraient être conservées) est exactement ce qui vous permettra de faire confiance à une simulation le jour où il n'y aura plus **aucune** valeur théorique à laquelle la comparer. C'est le cas dès le bonus ci-dessous.

0.2.8 Pour aller plus loin (bonus)

Si votre pendule fonctionne parfaitement, vous pouvez accrocher un deuxième pendule au bout du premier et simuler sa dynamique: c'est le fameux **double pendule**.

- Que se passe-t-il lorsque les angles de lâcher des pendules sont grands? Le mouvement vous semble-t-il encore prévisible?
- Lancez deux doubles pendules simultanément, avec des angles initiaux différant de 10^{-3} radian, et dessinez les deux traînées dans des couleurs différentes. Combien de temps faut-il pour que les deux trajectoires n'aient plus rien à voir? C'est une illustration directe du **chaos**: une sensibilité extrême aux conditions initiales, alors que les équations, elles, sont parfaitement déterministes.
- Vos trois contrôles de l'étape 5 restent-ils utilisables? La période n'a plus de sens ici, mais l'énergie et les longueurs des tiges, elles, doivent toujours être conservées: elles deviennent votre seul garde-fou.
- Ajoutez enfin un frottement fluide, c'est-à-dire une force $-k\vec{v}$ proportionnelle à la vitesse et opposée au mouvement. L'énergie n'est alors plus conservée: vérifiez qu'elle décroît, et observez le pendule s'immobiliser peu à peu à la verticale.