Vecteurs, forces et mouvement circulaire

Physique, 2026-2027

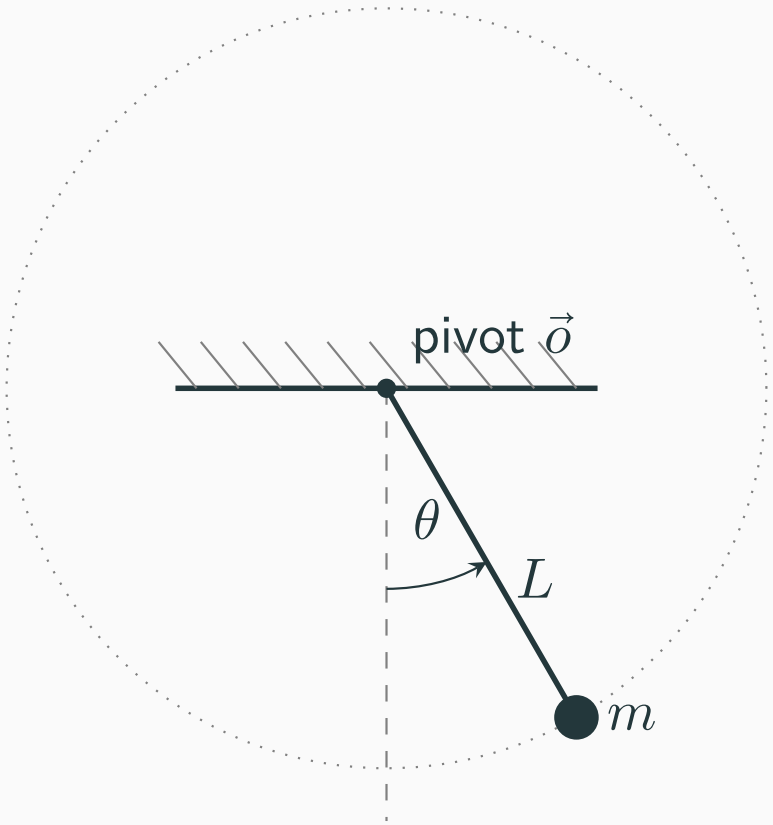
Jonathan Lemus, Orestis Malaspinas

2026

Informatique et Systèmes de Communication, HEPIA

Le pendule simple

- Sous l'action de la gravité
- Le poids attaché à la tige oscille de droite à gauche, puis de gauche à droite



Plan

Trois ingrédients pour simuler un mouvement (pendule, chute, ...)

1. les **forces** et les **lois de Newton**, dont la **gravité**,
2. le **mouvement circulaire**,
3. la boîte à outils mathématique : les **vecteurs**.

Le pendule simple, à la fin, combine le tout.

Un vecteur

Des grandeurs physiques (déplacement, vitesse, accélération, force) ont une **orientation** pouvant être décrit par des **vecteurs**.

- un vecteur a une **direction**, un **sens** et une **norme** (sa longueur),
- dans le plan, on le donne par ses **composantes** : $\vec{a} = (a_x, a_y)$,
- un **scalaire** (masse, temps, énergie) n'est qu'un nombre, sans orientation.

Les opérations sur les vecteurs seront vues plus loin.

Le concept de force

Une **force** est une action mécanique exercée sur un corps : poussée, traction, attraction à distance.

- elle est décrite par un **vecteur** : direction, sens, intensité (en newtons, N),
- son effet est de **modifier le mouvement** (accélérer, freiner, dévier),
- quand plusieurs forces agissent, elles se combinent en une **résultante** $\sum_i \vec{F}_i$.

Additionner des vecteurs

Former la résultante $\sum_i \vec{F}_i$, c'est faire une **somme de vecteurs**.

Addition :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y)$$

Multiplication par un scalaire λ :

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y)$$

$\lambda > 0$ garde le sens, $\lambda < 0$ l'inverse, $|\lambda|$ change la longueur.

Les trois lois de Newton

- **1ère loi - Inertie** : si $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$, la vitesse reste **constante**.
- **2e loi - Principe fondamental de la dynamique**

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_i,$$

où $\vec{a}_i$ est l'accélération et m la masse.

- **3e loi - Action - réaction** : si A exerce $\vec{F}$ sur B, alors B exerce $-\vec{F}$ sur A.

La 2e loi, mode d'emploi

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i$$

- $\vec{a}$ est **colinéaire** à la résultante, **proportionnelle** à elle, et inversement proportionnelle à m ;
- méthode pour calculer l'accélération : (1) isoler le corps, (2) lister les forces, (3) sommer les vecteurs, (4) diviser par m ;
- connaître $\vec{a}$ à chaque instant, c'est pouvoir **simuler** le mouvement en avançant pas à pas.

La gravité : le poids

Près de la Terre, tout corps de masse m subit une force (le poids $\vec{P}$) dirigée vers le centre de la Terre :

$$\vec{P} = m\vec{g}, \qquad \vec{g} = (0, -g), \qquad g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2$$

- direction et intensité **constantes**,
- ne dépend **ni de la vitesse ni de la trajectoire**,
- $\vec{g}$ est une **accélération** : en chute libre $\vec{a} = \vec{g}$, indépendamment de la masse.

Vitesse et accélération

Sur un petit intervalle de temps Δt, la **vitesse** est le déplacement divisé par Δt, et l'**accélération** la variation de vitesse divisée par Δt :

$$\vec{v}(t) \simeq \frac{\Delta \vec{p}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{p}(t) - \vec{p}(t - \Delta t)}{\Delta t}, \qquad \vec{a} \simeq \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- $\vec{v}$ est **tangente** à la trajectoire ; sa norme est la vitesse ;
- $\vec{a}$ mesure comment $\vec{v}$ change, **en norme ET en direction** ;
- plus Δt est petit, meilleure est l'approximation.

Exemple : une force constante

Si la **résultante est constante**, l'accélération l'est aussi et la position se calcule directement

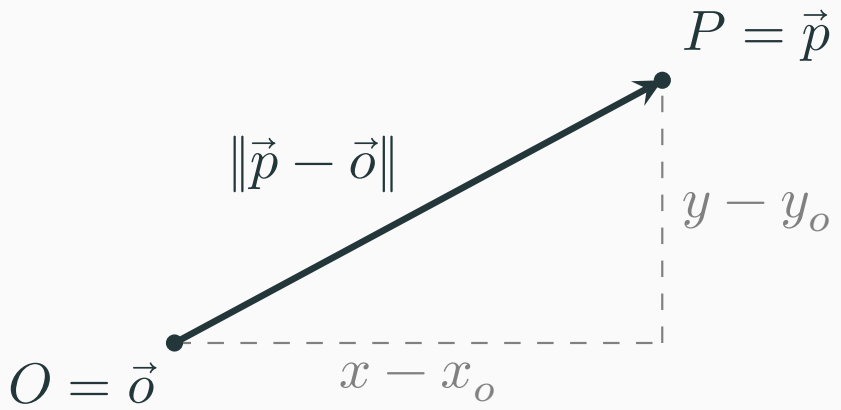
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Dès qu'une force **dépend de la position ou de la vitesse** (ressort, frottement de l'air, tension d'une tige) : il faut **intégrer numériquement** ou en d'autres termes pas de temps après pas de temps.

Décrire une position : le vecteur $\vec{p} - \vec{o}$

Soit deux points $O = (x_o, y_o)$ et $P = (x, y)$. Le vecteur qui va de O vers P est leur **différence**, et sa **norme est la distance** entre les deux points :

$$\vec{p} - \vec{o} = (x - x_o,\ y - y_o), \qquad \|\vec{p} - \vec{o}\| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

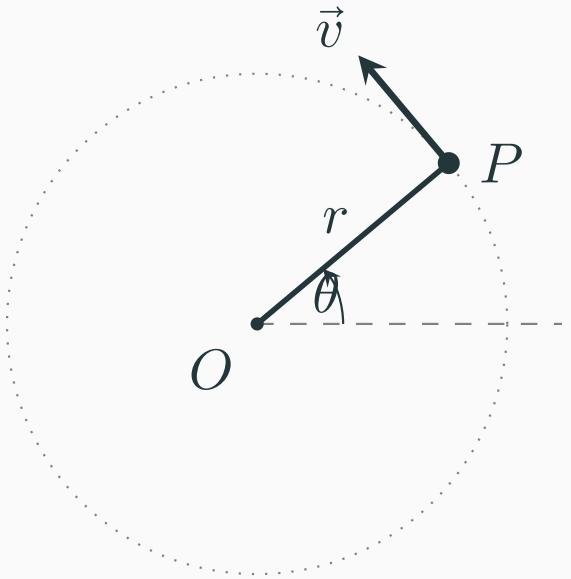


En divisant par sa longueur, on obtient un **vecteur unitaire** (norme 1) qui ne porte plus qu'une direction : $\hat{u} = (\vec{p} - \vec{o})/\|\vec{p} - \vec{o}\|$.

Mouvement circulaire : description

Un point parcourt un cercle de rayon r.

- angle $\theta(t)$, **vitesse angulaire** $\omega \simeq \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$,
- **période** $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (un tour complet), fréquence $f = 1/T$;
- si ω est constante : vitesse $v = \omega r$ constante **en norme**, $\vec{v}$ **tangente** au cercle.



Accélération centripète

Même quand la vitesse est **constante en norme**, le vecteur $\vec{v}$ change de **direction** en permanence (il reste tangent au cercle).

Comme tout changement de $\vec{v}$ est une **accélération**, un mouvement circulaire est **toujours accéléré**.

Pour un mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v, l'accélération pointe **vers le centre** et vaut

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Projeter un vecteur : le produit scalaire

Pour connaître la part d'un vecteur **le long d'une direction**, on utilise le **produit scalaire** :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos \varphi$$

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$, donc $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$;
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ exactement quand $\vec{a} \perp \vec{b}$;
- **projection** de $\vec{a}$ sur une direction unitaire $\hat{u}$: le nombre $\vec{a} \cdot \hat{u}$.

On s'en sert juste après pour isoler la composante de l'accélération **vers le centre**.

En vecteur, avec $\hat{u}$ le vecteur radial **sortant**

$$\vec{a} \cdot \hat{u} = -\frac{v^2}{r}$$

Force centripète

D'après la 2e loi de Newton, l'accélération vers le centre du cercle exige une **résultante dirigée vers le centre**, d'intensité

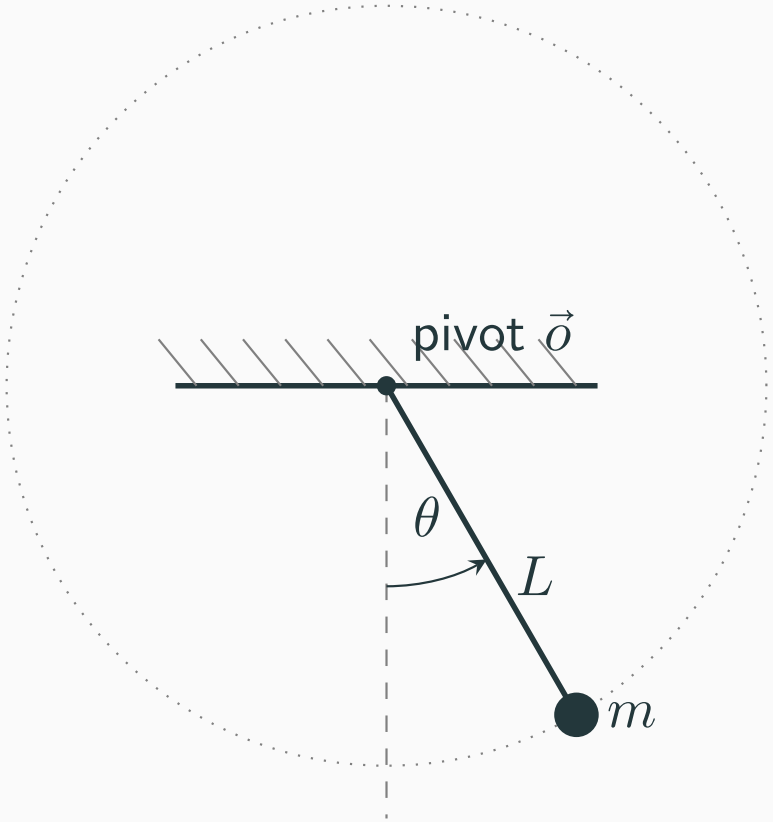
$$\left\| \sum_i \vec{F}_i \right\|_{\text{radial}} = \frac{mv^2}{r}$$

Ce n'est **pas une nouvelle force** : c'est le **rôle** tenu par une force réelle (tension d'un fil, gravité d'une orbite, frottement d'un virage, réaction d'un rail).

Sans elle, le corps repartirait en **ligne droite** (1e loi de Newton).

Application : le pendule simple

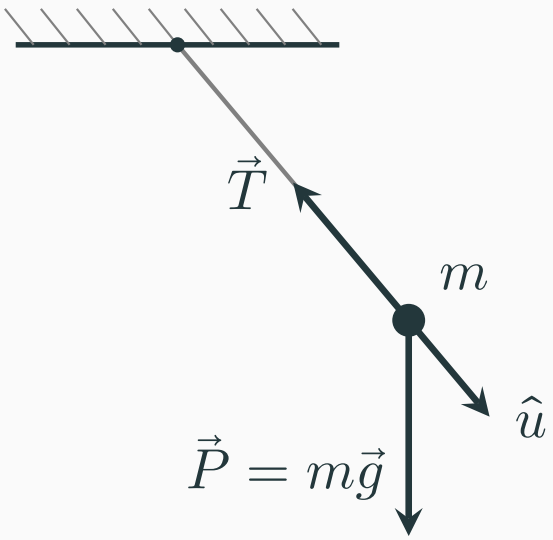
Masse ponctuelle m, tige **rigide et sans masse** de longueur L, pivot fixe $\vec{o}$, sans frottement. Lâchée **sans vitesse** depuis l'angle θ_0.



Contrainte $\|\vec{p} - \vec{o}\| = L$: la masse est sur un **cercle** (mouvement circulaire).

Pendule : bilan des forces

Deux forces : le **poids** $\vec{P} = m\vec{g}$ (connu) et la **tension** $\vec{T} = -T\hat{u}$ le long de la tige vers le pivot, avec $\hat{u} = \dfrac{\vec{p} - \vec{o}}{L}$.



La 2e loi nous donne :

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{T}{m}\hat{u}.$$

Inconnue : T, qui s'ajuste à chaque instant pour garder L constant.

Pendule : trouver la tension

La tige impose la condition centripète $\vec{a} \cdot \hat{u} = -\dfrac{v^2}{L}$. On projette

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{T}{m}\hat{u}.$$

sur $\hat{u}$ et on obtient

$$\vec{g} \cdot \hat{u} - \frac{T}{m} = -\frac{v^2}{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T}{m} = \frac{v^2}{L} + \vec{g} \cdot \hat{u}$$

d'où l'accélération en composantes

$$a_x = -\frac{T}{m}u_x, \qquad a_y = -g - \frac{T}{m}u_y$$

Pendule : période et validation

Lorsque l'amplitude l'oscillation est faible, la période période peut être approximée par

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \simeq 2.006 \text{ s} \quad (L = 1 \text{ m})$$

indépendante de la masse et de l'amplitude.

Ce résultat sert à **valider** notre simulation, avec également la **conservation de l'énergie**

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(y - y_o),$$

et la longueur de la tige

$$\|\vec{p} - \vec{o}\|.$$